

Zur Geschichte des Inhaltsbegriffes

von
Edmund Hlawka

Einleitung

Bolzano hat einmal gesagt: Es gibt Begriffe, die jeder kennt und nicht kennt. Er dachte dabei an Begriffe wie Kurve und Fläche. Der I n h a l t s b e g r i f f gehört wohl ebenfalls dazu. Ein anderer Grund, diesen Begriff in einem Didaktik-Symposium zu besprechen, kann auch so ausgesprochen werden: "Es ist nützlich, eine Sache von verschiedenen Seiten anzusehen. Sie gewinnt dadurch neue Aspekte, wird interessant." So wollen wir eine Reise durch die Zeit machen und sehen, wie sich der Begriff des Inhalts entwickelt hat. Wie immer werden zuerst Spezialfälle behandelt, und dann erst geht man zur allgemeinen Theorie über. (Lichtenberg, Aphorismen S.189: "Man soll Dinge, die man täglich vor Augen sieht, von einer anderen Seite betrachten. Dies ist ein Mittel, die Welt mit Erfolg zu lehren. Kolumbus, Kolumbus überall.")

Wir beginnen mit den Worten, welche den Anfang der geometrischen Untersuchungen von Herons (-100) Geometrica bilden: "Wie der alte Bericht uns lehrt, haben die meisten Menschen sich mit Vermessung und Verteilung von Land abgegeben, woraus der Name Geometrie (Landmessung) entstanden ist. Die Erfindung aber der Vermessung ist von den Ägyptern gemacht worden; denn wegen des Steigens des Nils wurden viele Grundstücke, die deutlich zu erkennen waren, unkenntlich durch das Steigen, viele auch nach dem Fallen, und es war dem einzelnen nicht mehr möglich, sein Eigentum zu unterscheiden; daher haben die Ägypter diese Vermessung erfunden, bald mit dem sogenannten Maßband, bald mit der Rute, bald auch mit anderen Maßen. Da nun die Vermessung notwendig war, verbreitete sich der Gebrauch zu allen lernbegierigen Menschen".

Später heißt es: "Von der Vermessung gibt es drei:
Linearmessung, Flächenmessung, Körpermessung."

Linearmessung ist nun alles, was geradlinig vermessen wird, indem es nur Länge hat; es wird auch Anfang und Zahl genannt.

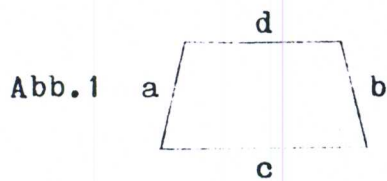
Flächenmessung aber, was Länge und Breite hat, und wodurch auch der Flächeninhalt erkannt wird.

Körpermessung aber, was Länge und Breite und Dicke hat, und wodurch auch alles Körperliche erkannt wird; es wird auch Kubus genannt.

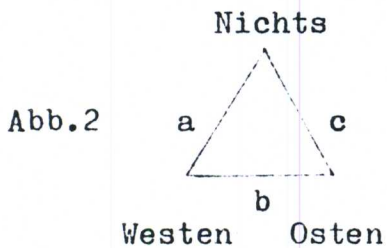
Die Maße aber sind von den menschlichen Körperteilen abgenommen, Finger, Handfläche, Spanne usw. Das kleinste von allen aber ist der Zoll, der auch Einheit genannt wird; zuweilen wird er aber geteilt; denn er läßt sowohl Halbtel als auch Drittel und Viertel und die übrigen Teilchen zu."

Gehen wir nun etwas genauer auf die Geschichte des Inhalts ein. Zunächst einmal: Wann ist der Name Inhalt aufgetaucht? Was haben die Ägypter wirklich schon gefunden? Wir wissen heute, dank der Forschung von Neugebauer, daß nicht nur in Ägypten, sondern auch in Mesopotamien schon eine hochentwickelte Mathematik vorhanden war (Neugebauer nennt sie kurz die babylonische Mathematik). Dies wird nun im Detail ausgeführt.

- 1) Der Name findet sich erst 1483, Flächeninhalt 1795, Volumen 1716. Andere Namen für
Flächeninhalt: area, cumbaduur, capicitas, quadratur (agrorum), tetragonismus
Kepler (1571-1632): Platz, Feld, Feldung.
für Volumen: Körperlicher Inhalt.
Flächenberechnung 2900 v. Chr.: Rechteck, Dreieck, Trapez



$$F = \frac{a+c}{2} \frac{b+d}{2}$$



Dreieck ($d = 0$)

$$F = \frac{a+c}{2} \frac{b}{2} \quad (\text{Tempelwand bei Ed Fu})$$

Schenkung von Feldern

$(\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)})$ ist die richtige Formel)

Wir finden früh Flächenteilung: Bei Kreis, Kreisring werden die Flächenberechnungen benützt, um Umwallung von Städten, Erdarbeiten bei Kanälen und Dämmen zu behandeln. Weiters finden wir Berechnung des Inhalts von Getreidespeichern nach der Formel

$$V = \frac{h}{3} (a^2 + ab + b^2)$$

Vgl. Neugebauer (1899-), Vorgriechische Mathematik;
van der Waerden (1900-), Erwachende Wissenschaft.

Was ist nun der Inhalt, von dem immer die Rede ist? Wir zitieren Hadwiger, "Der Inhaltsbegriff, seine Begründung und Wandlung in älterer und neuerer Zeit" (1952):

Der natürliche Inhalt einer Fläche, eines Körpers ist der Inhalt an sich, ist im direktesten Sinne die Raumbeanspruchung der Gesamtheit der Punkte. Wenn Zahlen vorkommen, so drücken diese nur das Verhältnis aus, in welchem der Inhalt eines Körpers (einer Fläche) zu demjenigen eines anderen steht. Der Rauminhalt (Flächeninhalt) ist eine geometrische Größe, eine selbständige Quantität. Eine Definition ist nicht möglich und überflüssig. Unter natürlichem Inhalt ist also der Inhalt gemeint, wie er durch die Babylonier, Ägypter Griechen zuerst, und dann bis ins 19. Jahrhundert aufgefaßt wurde:

Jede Fläche (jede Punktmenge) hat einen Inhalt. Es handelt sich nur um die Bezeichnung und die Bedeutung seiner Eigenschaften. Das Gleiche gilt für das Volumen.

Wir zitieren wieder Heron.

Hérons Vermessungslehre I:

"Verglichen werden die genannten Oberflächen mit einem geradlinigen rechtwinkligen Flächenstück, einem geradlinigen, weil die Gerade zum Unterschied von den übrigen Linien unverändert ist (denn jede Gerade paßt auf jede andere Gerade; die übrigen konvexen oder konkaven Linien nicht sämtlich auf sämtliche anderen). Deshalb verglich man mit etwas Feststehendem, nämlich der Geraden, weiters aber auch mit dem rechten Winkel. Denn wiederum paßt jeder rechte Winkel auf jeden anderen rechten Winkel, die anderen dagegen nicht sämtlich auf alle übrigen ihrer Gattung.

Man spricht aber von einer Quadratelle, wenn ein quadratisches Flächenstück Seiten von der Länge einer Elle hat. In ähnlicher Weise spricht man von einem Quadratfuß, wenn ein quadratisches

Flächenstück Seiten von der Länge eines Fußes hat. Die genannten Oberflächen werden daher mit diesen Flächenstücken oder Teilen verglichen".

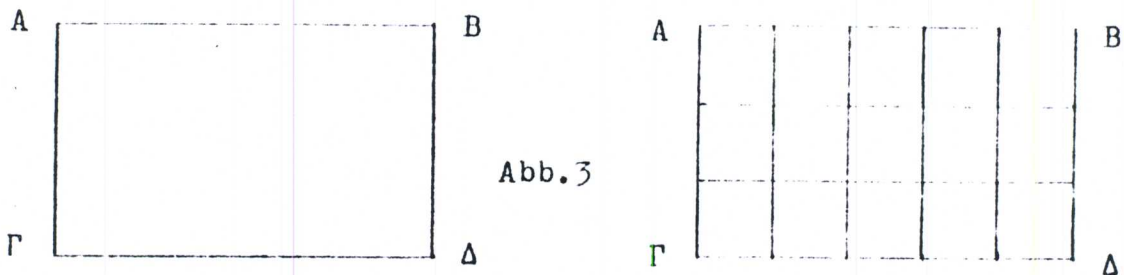
"Damit wir uns nicht bei jeder Messung Fuße oder Ellen oder Teile davon zu nennen brauchen, werden wir die Zahlenangaben in Einheiten messen, denn man kann dieselben jeder beliebigen Maßeinheit unterlegen."

Wir definieren als: Maßzahl = $\frac{J(A)}{J(E)}$ (E Einheitsquadrat bzw. Würfel)

Jetzt einige Beispiele aus Heron:

Hérons Vermessungslehre I

Es sei A B Γ Δ ein Rechteck, in dem AB = 5, A Γ = 3; zu finden sein Inhalt.



So wird der Inhalt des Rechtecks = 15 sein, denn wenn jede Seite geteilt wird, und zwar AB in seine 5 Einheiten, A Γ aber in seine 3 Einheiten und durch die Schnittpunkte Parallelen zu den Seiten des Parallelogramms gezogen werden, so wird die Fläche in 15 Flächenstücke geteilt sein, von denen jedes gleich 1 Flächeneinheit sein wird. Und wenn die Fläche ein Quadrat ist, so wird derselbe Beweis passen. Dazu aus Geometrica:

"Es sei ein gleichseitiges und rechtwinkliges Viereck, in dem jede Seite = 12 Fuß; zu finden sein Rauminhalt. Ich mache so:
 $12 \times 12 = 144$ Fuß; soviel ist sein Rauminhalt."

Ein Beispiel zur Körpervermessung, Vermessungslehre:

"Einen geradkantigen rechtwinkligen Körper zu messen, wenn jede Seite desselben gegeben ist, die Länge und die Breite und die Tiefe oder Dicke".

"Es sei die Länge = 20, die Breite = 12, die Dicke = 80. Wenn wir nun diese Zahlen miteinander multiplizieren, so gibt es 19 200. So groß wird der Körper sein. Der Beweis hierfür liegt auf der

Hand."

Von rechtwinkligen Dreiecken:

"Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Kathete = 30 Fuß, Grundlinie = 40 Fuß; zu finden seinen Rauminhalt.

Ich mache so: Grundlinie zu Kathete = 1200 Fuß, $\frac{1}{2} \times 1200 = 600$ Fuß; es sei der Rauminhalt 600 Fuß. (Geometrica, Ed. J.L.Heiberg S.211).

Begründung in der Vermessungslehre I: Man ergänze das rechtwinklige Parallelogramm AMΓΔ, dessen Inhalt = 12(00) ist, wie oben gezeigt; der Inhalt des Dreiecks ABΓ aber ist gleich der Hälfte des Parallelogramms ABΓΔ."

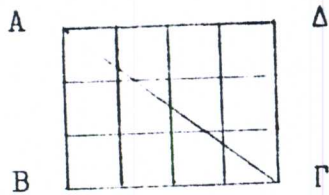


Abb.4

Geometrica (S. 244): "Ein beliebiges Dreieck wirst du so messen; es sei z.B. in einem Dreieck die eine Seite = 13(Schoinien), die zweite = 14(Sch.), die dritte = 15(Sch.); zu finden seinen Rauminhalt. Mache so: $13 + 14 + 15 = 42$, $\frac{1}{2} \times 42 = 21$; subtrahiere hiervon die drei Seiten eine nach der anderen, d.h. $21 \div 13 = 8$, $21 \div 14 = 7$, $21 \div 15 = 6$; multipliziere dann dies unter sich, $21 \times 8 = 168$, $168 \times 7 = 1176$, $1176 \times 6 = 7056$; $\sqrt{7056} = 84$; soviel Schoinien wird der Rauminhalt des Dreiecks."

(Heronsche Dreiecksformel $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$)

Noch ein Beispiel (Vermessungslehre I, Ed.H.Schöne, S.19).

"Es gibt eine allgememeine Methode, um, wenn drei Seiten eines beliebigen Dreiecks gegeben sind, den Inhalt ohne die Höhe zu finden. Beispielsweise seien die Seiten des Dreiecks = 7,8,9.

$$7 + 8 + 9 = 24$$

$$\frac{24}{2} = 12$$

$$12 - 7 = 5, \quad 12 - 8 = 4, \quad 12 - 9 = 3$$

$$12 \times 5 = 60, \quad 60 \times 4 = 240, \quad 240 \times 3 = 720$$

Daraus ziehe die Wurzel, und sie muß gleich dem Inhalt des Dreiecks sein. Da nun 720 eine rationale Wurzel nicht besitzt, so werden wir mit kleinster Differenz die Wurzel folgendermaßen ziehen: Da die 720 nächstkommende Quadratzahl 729 ist und Wurzel 27 hat, so teile 720 durch 27; es ergibt $26 \frac{2}{3}$.

$$27 + 26 \frac{2}{3} = 53 \frac{2}{3}$$

$$\frac{53 \frac{2}{3}}{2} = 26 \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Es wird also die Wurzel aus 720 annähernd $= 26 \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ sein. Denn $(26 \frac{1}{2} + \frac{1}{3})^2 = 720 \frac{1}{36}$, so daß die Differenz nur $\frac{1}{36}$ beträgt."

$$(\sqrt{a^2 - b} = a - \frac{1}{2} \frac{b}{a})$$

Weiteres Beispiel: R hat den Flächeninhalt = 2 Quadrate!

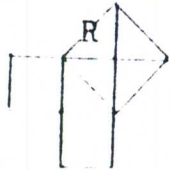


Abb.5

R läßt sich aber nicht in 2 Quadrate zerlegen!

§ 1. Dieser Weg führt also nicht weiter. Die Griechen haben einen anderen Weg eingeschlagen. In vollkommener Weise findet er sich bei Euklid (-300) in den Elementen.

Es wird die Axiomatische Methode verwendet. Wir beginnen mit folgenden Axiomen (Euklid, Buch I)

- 0) $A \equiv B, B \equiv C \rightarrow A \equiv C$ Gleichheitspostulate von Euklid
- 1) $A \equiv B, C \equiv D$ für Größen (Längen, Flächeninhalten, Volumina)
- $\rightarrow A + C \equiv B + D$
- 2) $A + C \equiv B + C$
- $\rightarrow A \equiv B$
- 2') $A + A \equiv B + B \rightarrow A \equiv B$
- 3) A kongruent B ($A \approx B$)
- $\rightarrow A \equiv B$
- 4) $B \subset A \rightarrow B \leq A$ (Das Ganze \geq als der Teil)

Wir betrachten nun Polygone (Polyeder) P, Q, \dots , welche kompakt sind und für die gilt:

$$P = P^0 (P^0 \text{ offener Kern, } \bar{Q} \text{ abgeschlossene Hülle})$$

Es sei $J(P)$ Inhalt ("natürlicher Inhalt")

Dann lautet Euklid's GröÙenaxiom 1:

$$1) \boxed{J(P_1 + P_2) = J(P_1) + J(P_2)}$$

Es ist $P_1 + P_2 = P_1 \cup P_2$, wobei $(P_1 \cap P_2)^0$ leer sein soll.

$P_1 + P_2$ heißt die Summe von P_1 und P_2

Euklid's Größenaxiom 3:

2) Wenn $P \approx Q \rightarrow J(P) = J(Q)$

Folgerung: $P = P_1 + \dots + P_s, \quad Q = Q_1 + \dots + Q_s \quad (1)$

$$P_1 \approx Q_1, \dots, P_s \approx Q_s$$

$$\rightarrow J(P) = J(Q)$$

Def.: Gilt (1) für P und Q, dann sagen wir (H.Liebmann, D.Hilbert) P ist zerlegungsgleich Q

$$P \stackrel{Z}{\approx} Q$$

Beispiel (Proklus)

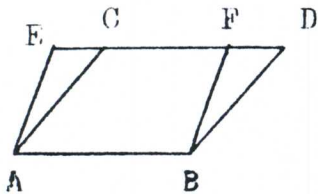


Abb. 6

P Parallelelogramme

$$P = ABEF$$

$$Q = ABCD$$

$$P = ABCF + ACE$$

$$Q = ABCF + BDF$$

$$ABCF \approx ABCF, \quad ACE \approx BDE$$

$$\rightarrow P \stackrel{Z}{\approx} Q \leftrightarrow J(P) = J(Q)$$

2. Folgerung: Geg. $P, Q \exists P', Q' \quad (2)$

mit $P' \stackrel{Z}{\approx} Q'$ und $P + P' \stackrel{Z}{\approx} Q + Q'$

so folgt

$$J(P) = J(Q)$$

Beweis: $J(P) = J(Q'), \quad J(P + P') = J(Q + Q')$

$$J(P) + J(P') = J(Q) + J(Q') \rightarrow J(P) = J(Q)$$

Def. 2: Gilt (2) für P und Q, dann sagen wir (H.Liebmann, D.Hilbert) P ist ergänzungsgleich zu Q

$$P \stackrel{e}{\approx} Q$$

Beispiel 2: Euklid, Buch I, § 35 (Satz 25)

Parallelelogramme mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind ergänzungsgleich

("2. Fall")

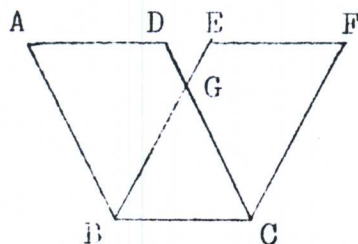


Abb.7

$$P = ABCD$$

$$Q = EFCB$$

$$BEA = BGDA + DEG$$

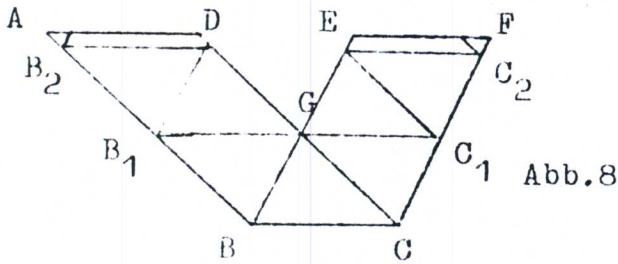
$$CDF = CFEG + DEG$$

$BGDA \approx CFEG,$ $DEG \approx DBG$
 $\rightarrow BEA \stackrel{Z}{\approx} CDF$
 $\rightarrow BGDA \stackrel{e}{\approx} CFEG$
 $BCG \approx ECG$
 $\rightarrow P \stackrel{e}{\approx} Q$

Beispiel 1 und Fall 2 ergibt den allgemeinen Satz.

Bemerkung: Es wurde im 19. Jahrhundert gezeigt: Im Beispiel 2 gilt sogar $P \stackrel{Z}{\approx} Q$, d.h. P und Q sind sogar zerlegungsgleich.

Wir geben den Beweis in folgender Figur.



Dazu einige Namen und Daten:

W. Bolyai 1832

Gerwein 1833

F. Schur (1856-1932)

W. Killing 1898 (1847-1923)

Stolz (1842-1905)

Die dreiletztenannten Mathematiker haben erkannt, daß das Axiom von Eudoxus verwendet wird.

Euklid § 41: Wenn ein Parallelogramm mit einem Dreieck dieselbe Grundlinie hat und zwischen denselben Parallelen liegt, so ist das Parallelogramm doppelt so groß wie das Dreieck.

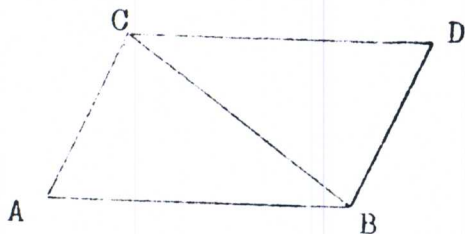


Abb. 9

$$\Delta = ABC$$

$$P = ABCD$$

$$P = 2 \Delta$$

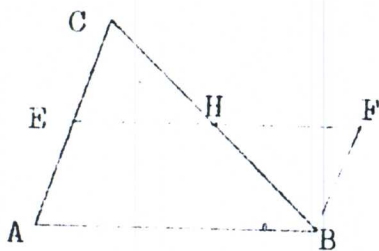


Abb. 10

$$\Delta ABC = ABHE + EHC$$

$$ABEF = ABHE + BFH$$

$$EHC \approx BFH$$

$$\rightarrow \Delta ABC \stackrel{Z}{\approx} \Delta ABEF$$

Auf gleichen Grundlinien zwischen denselben Parallelen gelegene Dreiecke sind einander gleich.

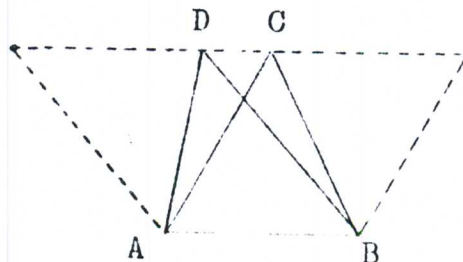


Abb. 11

Satz von Gnomon § 43

In jedem Parallelogramm sind die Ergänzungen der um die Diagonale liegenden Parallelogramme einander gleich.

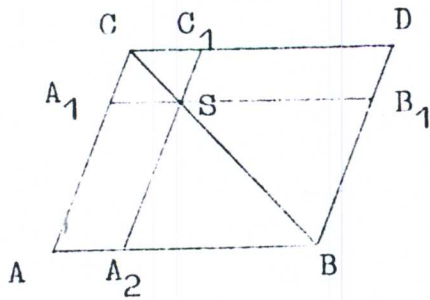


Abb.12

$$P_1 = SB_1DC_1$$

$$P_2 = SA_1AA_2$$

(die Ergänzungen)

$$\text{Beh. } P_1 \stackrel{e}{=} P_2$$

Spezialfall; Rechteck

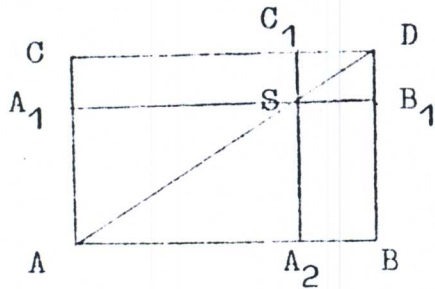


Abb.13

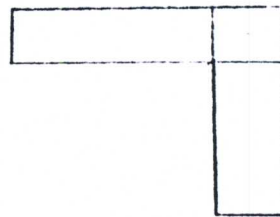


Abb.14

Gnomon = Schattenstab

$$\Delta ABD = A_2BB_1S + AA_2S + SB_1D$$

$$\Delta ADC = A_1SC_1C + AA_1S + SDC_1$$

$$AA_2S \cong AA_1S, \quad SB_1D \cong SDC_1$$

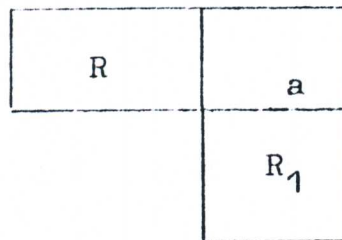
$$\Delta ABD \cong \Delta ADC$$

$$A_2BB_1S \stackrel{e}{=} A_1SC_1C$$

(Vorpythagoräisch)

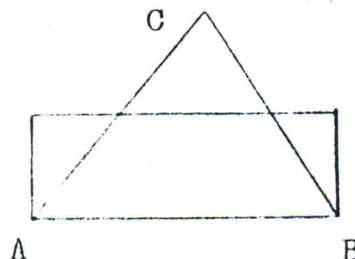
Satz 1: Jedes Rechteck R ist flächengleich einem Rechteck R₁ mit vorgegebener Seite a.

Abb.15



Satz 2: Zu jedem Dreieck gibt es ein flächengleiches Rechteck (Parallelogramm) mit der gleichen Grundlinie wie das Dreieck.

Abb.16



Satz 3: Zu jedem Dreieck gibt es ein flächengleiches Rechteck mit vorgegebener Grundlinie a.

§ 2. Anwendung

"Pythagoras" oder Magister mathesos

Zerlegungsbeweise

Euklid I. Satz 47

$$\rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

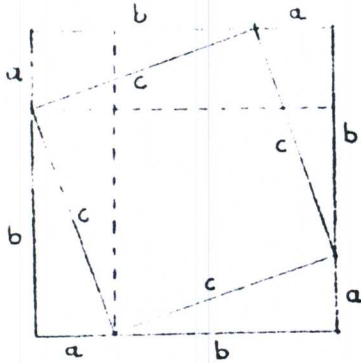


Abb.17

Sogenannter "Chinesischer Beweis des Pythagoras" Beweis durch geometrische Algebra

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= c^2 + 4 \frac{ab}{2} \end{aligned}$$

(Nach Hasse, Proben mathematischer Forschung, Otto Sattte Verlag, 1955 S.31)

Beweis: $FBA \approx DBC$
 $FBCG = 2 FBA$
 $DBKL = 2 DBC$
 $FBCG = DBKL$
 $HACJ = EAKL$
 $FBCG + HACJ = DBAE$

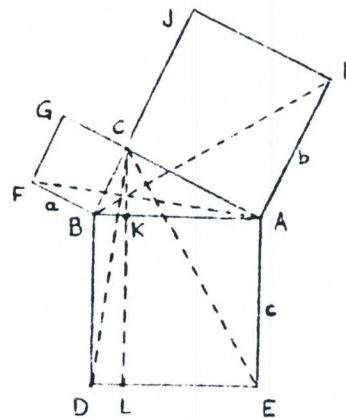


Abb.18

China: Tscheon pei 1213
 -1100?

P.Epstein 1904 (1871-1939)

F. Bernstein 1909 (1878-1956)

Brandes 1908, Dissertation

E. Artin, H. Hasse empfehlen den chinesischen Beweis.

Fußnote: Der pythagoräische Beweis kann mit Parkettierungsproblemen in Zusammenhang gebracht werden.

Literatur: Lietzmann, Der Pythagoräische Lehrsatz, Teubner 1951

§ 3. Es wird nun von Euklid folgender Satz gezeigt.

Hauptsatz: Zu jedem Polygon P gibt es ein ergänzungsgleiches Dreieck Δ und zu diesem ein Rechteck R mit vorgegebener Seite e, so daß $\Delta \approx R$ ist.

Beweis(durch vollständige Induktion):
 (Bei Euklid für Vier- und Fünfecke)

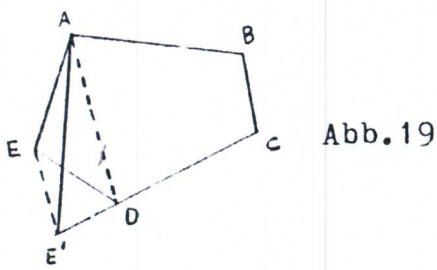


Abb.19

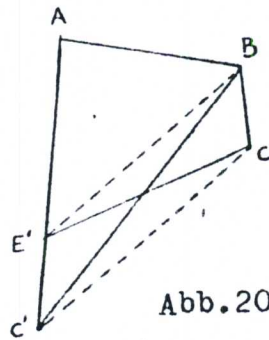


Abb.20

(Ecken abschneiden)

$$ABCDE \cong AE'CB$$

$$AE'CB \cong ABE'$$

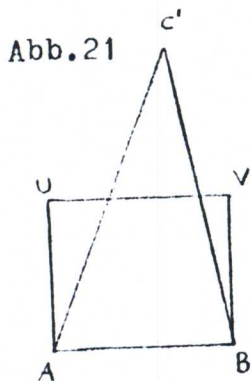


Abb.21

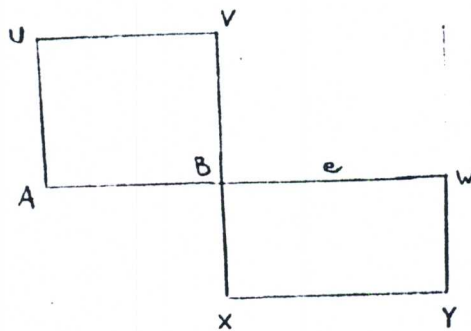


Abb.22

e = Einheit

$$ABC' \cong ABUV$$

$$ABUV \cong BWXY$$

BX ist "zugeordnet" ABCDE

Man kann BX als Flächeninhalt des Polygons P = ABCDE nehmen.

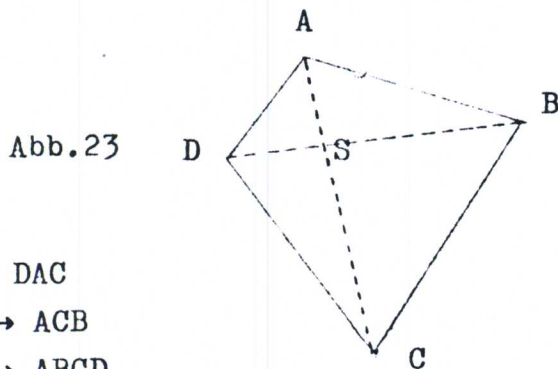


Abb.23

- UX → DAC
- XX₁ → ACB
- UX₁ → ABCD
- UX₁ = UX + XX₁

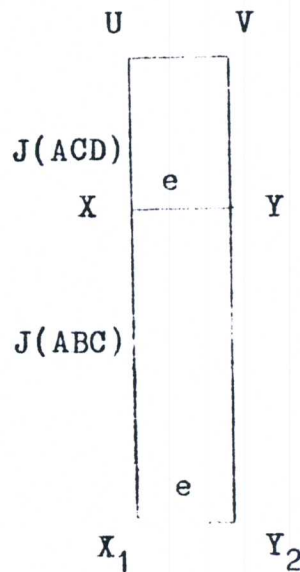


Abb.24

2000 Jahre später wurde dieser Gedanke von Hilbert aufgenommen: Man nimmt die Strecke UX als Flächeninhalt von ACD und definiert

$J(ABCD) = \text{Summe der Strecken}$. Es entsteht dabei die Frage:

Es ist auch $ABCD = ABD + DBC$

Kommt bei dieser Zerlegung das Gleiche heraus?

O. Perron: Mancher Pfiffikus könnte hoffen, durch eine vorteilhaftere Zerlegung etwas mehr für sein Grundstück herauszuschlagen.

§ 4. Erster Versuch einer Definition

J.M.C. Duhamel 1866. Def. der Flächengleichheit:

Zwei Polygone haben den gleichen Flächeninhalt, wenn sie ergänzungsgleich (zerlegungsgleich) sind.

De Zolt versuchte 1883 dieses Programm durchzuführen und wurde dabei zu folgendem Axiom geführt und versuchte es zu beweisen. Axiom von de Zolt: Zerlegt man ein Polygon in Dreiecke und läßt man ein Dreieck weg, so ist der Rest nicht mit dem Ganzen zerlegungsgleich.

(Bei Euklid: Der Teil ist nicht größer als das Ganze).

R. de Paolis (1884): Ein Teil des Polygons kann nicht dem ganzen Polygon zerlegungsgleich sein.

Rausenberger (1887): Wenn 2 Figuren durch irgendeine Zerlegung flächengleich sind, so gibt es keine andere Zerlegung, bei der eine Figur sämtliche Teile der anderen und außerdem noch weitere enthält.

O. Stolz, F. Schur, W. Killing haben erkannt, daß man das Axiom von de Zolt vermeiden kann, wenn man das Axiom von (Archimedes) Eudoxus benützt.

Ist das nicht trivial?

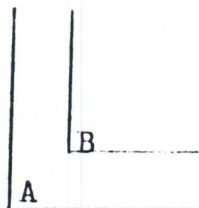
Gegenbeispiele:

A unendlicher Winkelhaken
B geht durch Translation von A hervor

$A \supset B$

$B \approx A$

Abb. 25



Beispiel von Marzukiewicz & Sierpinski 1914

$\exists A \subset \mathbb{R}_2$, so daß

$$A = B \cup C \quad B \cap C = \emptyset$$

$A \simeq B, A \simeq C$ ist.

Beweis: Es sei α eine komplexe transzendente Zahl mit $|\alpha|=1$, z.B. $\alpha = e^i$ ($i = \sqrt{-1}$)

$$A = \left(\sum_{k=0}^n c_k \alpha^k \right), n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{Z}, c_0 \geq 0$$

$$B = \{ \gamma \in A, c_0 = 0 \}$$

$$C = A - B = \{ \gamma \in A, c_0 > 0 \}. \quad \begin{array}{l} \text{Es sei } \beta(z) = z + 1 \text{ Translation} \\ \alpha(z) = \alpha z \text{ Drehung} \\ \alpha(A) = B, \beta(A) = C \end{array}$$

Vgl. Sierpinski (1882-1969),

On the Congruence of Sets and their Equivalence by finite Decomposition (1946).

Weiteres Beispiel: $U = (\alpha^k(P)), k=0,1,2,\dots$, wobei P ein Punkt auf den Kreis K , α irrationaler Drehwinkel*. Es ist dann

$$U \stackrel{Z}{\simeq} U - \{P\}$$

Es sei V die \mathbb{R}_2 -Menge der Radien: $V \stackrel{Z}{\simeq} V - \{OP\}, \alpha(V) = V - \{OP\}$

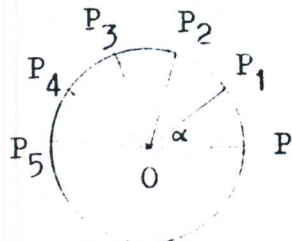


Abb.26

§ 5. Bisher wurde die Ähnlichkeit nicht benützt. Wir wenden uns nun zu Euklid, Buch 6:

Ähnlichkeit

§ 1. Dreiecke (Parallelelogramme) mit gleicher Höhe verhalten sich wie die Grundlinien.

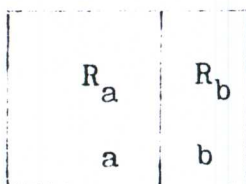


Abb.27

$$\frac{J(R_a)}{J(R_b)} = \frac{a}{b}$$

* $\alpha/\pi = \text{irrational}$

Zum Beweis: Es wird die Definition von Eudoxus V,4 benützt:
 Es gilt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, wenn aus $ma = nb \rightarrow mc = nd$ und aus
 $ma \geq nb \rightarrow mc \geq nd$.

Es ist $c = J(R_a)$, $d = J(R_b)$

1. Fall: $ma = nb$

z.B. $m = 3$

$n = 2$

Abb.28



$R_n(a)$... Rechteck mit Grundlinie na und Höhe h

$$J(R_n(a)) = n J(R(a))$$

$$J(R_m(b)) = m J(R(b))$$

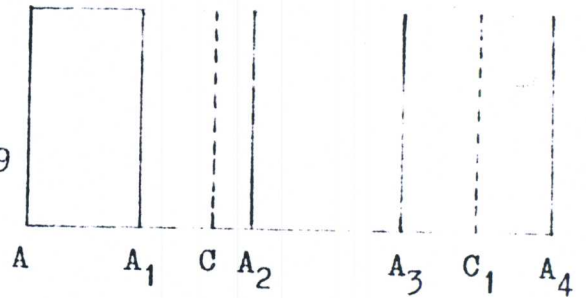
Es ist $J(R_n(a)) = J(R_m(b))$

2. Fall: $ma > nb$

z.B. $m = 4$

$n = 2$

Abb.29



$$R_m(a) \supset R_n(b)$$

$$J(R_m(a)) = m J(R(a)) > n J(R(b))$$

$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = a$$

$$AC = CC_1 = b$$

Satz: Sei $AB = BB_1 = B_1B_2 = a$ und $GG_1 = GD$, dann ist

$$\frac{J(\triangle ABC)}{J(\triangle GDC)} = \frac{AB}{GD}, \quad J(\triangle AB_1C) = 2 J(\triangle ABC) \text{ usw.}$$

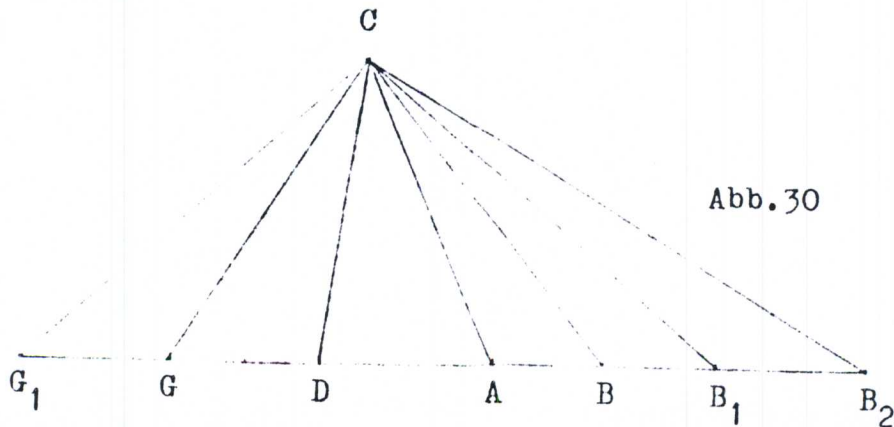


Abb.30

§ 6. Moderne Fassung: Funktion f (natürlich nicht notwendigerweise stetig) mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^+ = \{x \geq 0\}$

- 1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (Cauchy'sche Funktionalgleichung)
- 2) $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq 0$

Aus 2) \rightarrow $f(x) \geq f(y)$ wenn $x \geq y$

Bew. $f(x) = f(x-y+y) = f(x-y) + f(y) \geq f(y)$

Beh. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \rightarrow$ $f(x) = cx$ ($c = f(1)$)

Bew.: Aus 1) folgt $\alpha)$ $f(nx) = nf(x)$, $n \in \mathbb{N}$

$\beta)$ $f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m} f(x)$, $m \in \mathbb{N}$

$\rightarrow \gamma)$ $f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m} f(x)$

Es sei $x \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \exists (\alpha_n), (\beta_n) \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha_n \leq x \leq \beta_n$, $\lim_n (\alpha_n - \beta_n) = 0$

$f(\alpha_n) = \alpha_n f(1)$, $f(\beta_n) = \beta_n f(1)$

$\alpha_n f(1) \leq xf(1) \leq \beta_n f(1)$

$\alpha_n f(1) = f(\alpha_n) \leq f(x) \leq f(\beta_n) = \beta_n f(1)$

Jetzt $n \rightarrow \infty$ $f(x) = xf(1)$

Beispiel: $f(x) =$ Inhalt eines Rechtecks der Höhe h mit der Länge x
 $f(x) = xf(1) = x$. Inhalt des Rechtecks der Höhe h und der Länge 1.

Vergleiche dazu auch W. Kirsch 1977, Math.phys. Semesterberichte 54(1977), 172-187

Wir geben noch eine weitere Anwendung:

Flächeninhalt des Dreiecks in der Nichteuklidischen (NE) Geometrie
 nach Gauß (Werke 8, 221-23; Brief an J. Bolyai 1832) im Modell
 von F. Klein

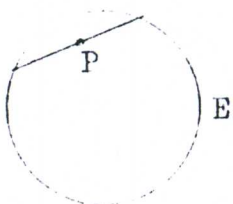
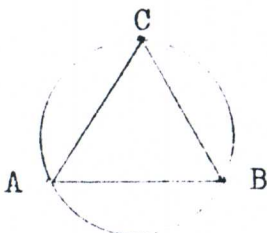


Abb.31



NE-Bewegung = Projektive Abb.,
 welche E festlassen. Punkte auf
 E unendlich weit.

Asymptotisches Dreieck (3-faches Δ),
 wenn A, B, C unendlich weit sind.

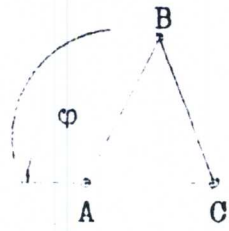
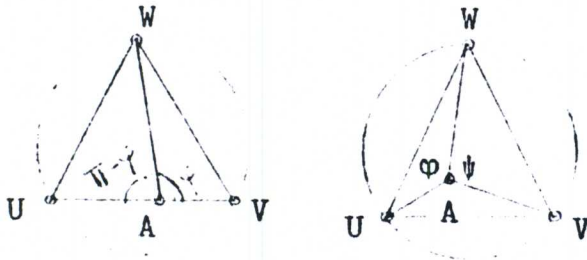


Abb. 32

Man kann zeigen
 $K = J(\Delta \text{ asympt.})$ unabhängig
 von A, B, C
 Es sei nun A endlich,
 B, C unendlich
 $J(ABC) = J(\varphi)$ ist zu bestimmen.



Wir wählen $K = \pi$
 $\alpha) J(\varphi) + J(\pi - \varphi) = K$

$$J(\varphi) + J(\psi) + J(\pi - (\varphi + \psi)) = K$$

Nach $\alpha)$ ist
 $c(\varphi + \pi - \varphi) = K$
 $c\pi = K$

Es ist $J(\varphi) + J(\psi) = J(\varphi + \psi)$
 also $J(\varphi) = c\varphi$

Jetzt Dreieck $ABC = \Delta$ (A, B, C alle im Endlichen)
 Innenwinkel α, β, γ

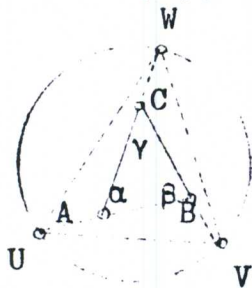


Abb. 33

UAW = I	$J(I) = c\alpha$
CVW = II	$J(II) = c\beta$
UBV = III	$J(III) = c\gamma$

$$c\pi = K = J(I) + J(II) + J(III) + J(\Delta)$$

$$J(\Delta) = (\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$$

§ 7. Nach dieser Unterbrechung setzen wir die Entwicklung von Euklid fort:

Er zeigt:

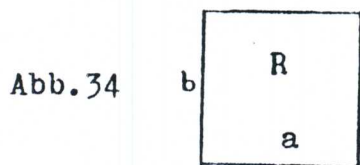


Abb. 34

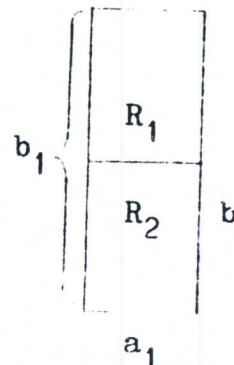


Abb. 35

$$J(R) = J(R_1) \leftrightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{b_1}{b}$$

Beweis:

$$1) \quad \frac{J(R)}{J(R_2)} = \frac{a}{a_1}, \quad \frac{J(R_1)}{J(R_2)} = \frac{b_1}{b}$$

$$J(R) = J(R_1) \rightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{b_1}{b}$$

$$2) \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b_1}{b} \rightarrow \frac{J(R)}{J(R_2)} = \frac{J(R_1)}{J(R_2)} \rightarrow J(R) = J(R_1)$$

Es seien nun P, P_1 Parallelogramme, Δ, Δ_1 Dreiecke mit Grundlinien a bzw. a_1 und Höhen h bzw. h_1 . Dann gilt

Satz: $J(P) = J(P_1) \leftrightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{h_1}{h}$ Beweis folgt aus den Relationen:
(siehe Zeichnung)

$$J(P) = J(R), \quad J(P_1) = J(R_1)$$

$$a \equiv \bar{a}, \quad a_1 \equiv \bar{a}_1$$

$$(*) \quad J(R) = J(R_1) \leftrightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{\bar{a}}{\bar{a}_1} = \frac{h_1}{h}$$

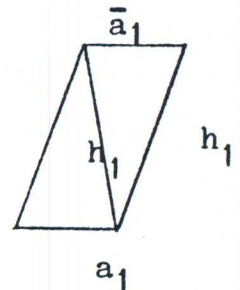
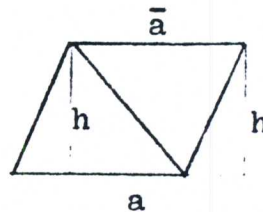


Abb. 36,37

Analog gilt:

$$\text{Satz: } J(\Delta) = J(\Delta_1) \leftrightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{h_1}{h}$$

Satz: P_1 ähnlich zu P ($P_1 = \lambda P$)

$$\frac{J(P_1)}{J(P)} = \lambda^2$$

Beispiel: Rechtecke R, R_1 . Es ist $\frac{a}{a_1} = \frac{1}{\lambda} = \frac{b}{b_1}$, wenn $R_1 = \lambda R$

Aus (*) folgt $\frac{J(R)}{J(R_1)} = \frac{1}{\lambda^2}$

§ 8. Jetzt machen wir einen Sprung in die Neuzeit!

Hilbert (1862-1943) hat in den Grundlagen der Geometrie (1. Auflage 1899, 4. Kap.) den Flächeninhalt folgendermaßen begründet:

Definition: 1) $J(\Delta) = \frac{1}{2} gh$ (als Strecke)

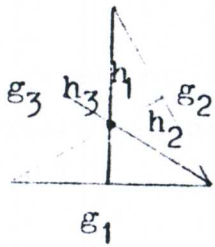


Abb. 38

$$g_1 h_1 = g_2 h_2 = g_3 h_3$$

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{h_2}{h_1}$$

Die Definition ist also zulässig.

Def. 2) $P = \Delta_1 + \dots + \Delta_s$
 $J(P) = J(\Delta_1) + \dots + J(\Delta_s)$

Def. ist zulässig: Ist $P = \Delta_1' + \dots + \Delta_t'$, so ist
 $J(\Delta_1) + \dots + J(\Delta_s) = J(\Delta_1') + \dots + J(\Delta_t')$

Hilbert zeigt nun (gestützt auf die Arbeiten seiner Vorgänger):

Satz 1) (Ohne Benützung des Archimedischen Axioms)

Es ist $J(P) = J(Q) \leftrightarrow P$ ergänzungsgleich Q

Satz 2) (Mit Benützung des Archimedischen Axioms)

$J(P) = J(Q) \leftrightarrow P$ zerlegungsgleich Q

Der Satz 2 bleibt nicht mehr richtig in einer Nichtarchimedischen Geometrie.

Man vergleiche H. Freudenthal, Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie. (4) V (1957)

Weitere Untersuchungen dazu z.B. Finzel, Math. Ann. 72 (1912), Bernays (1888-1977), Elemente der Math. 8 (1953)

§ 9. Volumen von Polyedern

Euklid Buch 11

Zerlegungs- und ergänzungsgleich wird wie bei Polygonen definiert.

Weiters gelten die gleichen Folgerungen. § 25 betrachtet

Prismen P, P_1, \dots

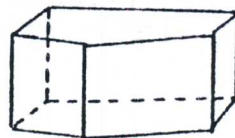
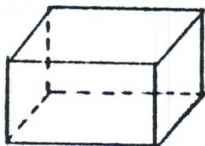


Abb. 39, 40

§ 29 zeigt $J(P) = J(P_1)$ wenn g (Grundfläche P) = g_1 (Grundfläche P_1)

und Höhe $P = \text{Höhe } P_1$

§ 30 zeigt $\frac{J(P)}{J(P_1)} = \frac{g}{g_1}$, wenn $h = h_1$

§ 33 zeigt: Ist $P = \lambda P_1 \rightarrow \frac{J(P)}{J(P_1)} = \lambda^3$

Es wird weiters gezeigt: § 34: haben zwei Prismen das gleiche Volumen, so ist $\frac{g}{g_1} = \frac{h_1}{h}$.

Weiters ist gezeigt:

Satz: $J(P) = \frac{1}{2} J(P_1)$. Dabei ist P das Parallelogramm $ABCD$, welches zum Dreieck ABC gehört ($P_1 = ABC$).



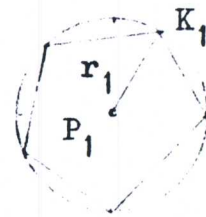
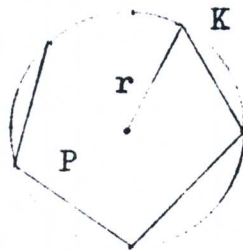
Abb. 41

§ 10. Jetzt kommt bei Euklid die Kreismessung!

Buch 12

§ 1. Flächeninhalt des Kreises

Abb. 42, 43

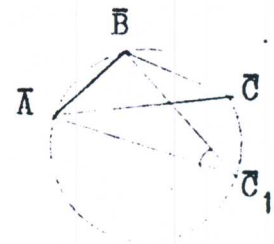
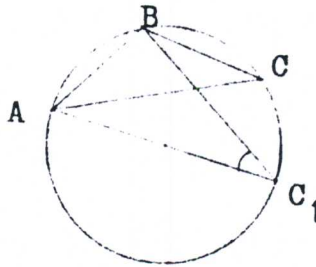


Vors.: $P = \lambda P_1$

Beh.: $\frac{J(P)}{J(P_1)} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2$

Bew. für Dreiecke:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\bar{A}\bar{B}}{\bar{A}\bar{C}} \quad \frac{AB}{\bar{A}\bar{B}} = \frac{AC}{\bar{A}\bar{C}}$$



$$ABC_1 \approx \bar{A}\bar{B}\bar{C}_1$$

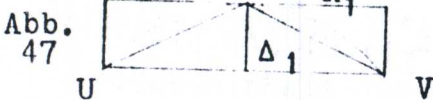
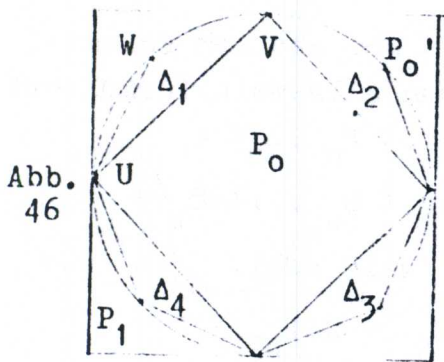
Abb. 44, 45

(Rechter Winkel bei B, \bar{B} ; gleicher Winkel bei $C, C_1, \bar{C}, \bar{C}_1$)

$$\frac{AB}{\bar{A}\bar{B}} = \frac{BC_1}{\bar{A}\bar{C}_1} = \frac{AC_1}{\bar{A}\bar{C}_1} = \frac{2r}{2r_1}$$

$$\frac{J(ABC)}{J(\overline{ABC})} = \left(\frac{AB}{\overline{AB}}\right)^2 = \left(\frac{2r}{2r_1}\right)^2$$

Wir gehen von P_0 aus und konstruieren P_1 $K \supset P_1 \supset P_0$



$$\text{Es ist } J(P_1) - J(P_0) \geq \frac{1}{2}(J(K) - J(P_0))$$

Beweis:

$$\begin{aligned} J(P_1) - J(P_0) &= J(\Delta_1) + J(\Delta_2) + \\ &\quad + J(\Delta_3) + J(\Delta_4) \\ &\geq \frac{1}{2} (J(S_1) + J(S_2) + J(S_3) + J(S_4)) \\ &= \frac{1}{2} (J(K) - J(P_0)) \end{aligned}$$

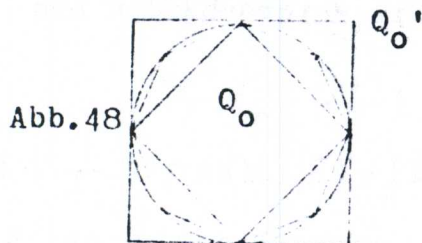
(Es ist ja $R_1 \approx 2\Delta_1$ und $R_1 \supset S_1$, wo S_1 das Kreissegment UVW ist)

Der Prozeß wird wiederholt

$$P_0 \subset P_1 \subset P_2 \dots \subset K$$

$$J(P_{n+1}) - J(P_n) \geq \frac{1}{2} (J(K) - J(P_n))$$

Analog im Kreis K_1 mit Radius r_1 :



$$Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \dots \subset K$$

Es ist P_0 ähnlich zu Q_0

P_1 ähnlich zu Q_1

⋮

$$\frac{J(P_n)}{J(Q_n)} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \text{ für alle } n \quad (**)$$

Die Folge (P_n) schöpft K aus, ebenso schöpft (Q_n) die Folge K_1 aus, also folgt aus (**)

$$\frac{J(K)}{J(K)} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2$$

(Hippokrates - 440)

Exakt durchgeführt wurde es von Eudoxus v. Knidos mit der Exhaustionsmethode.

(Name von Gregorius a St. Vincentio 1647 (1514-1667))

Antiphone (-400): Der Kreis wird durch die eingeschriebene Polygone besser und besser approximiert.

Jedes Vieleck kann in ein Quadrat verwandelt werden, also ist dies auch beim Kreis möglich.

Der Kreis ist ein Polygon mit ∞ vielen Ecken.

§ 11. Das Exhaustionsprinzip, welches nun allgemein formuliert werden soll: Gegeben 2 Folgen $P_1 \subset P_2 \dots \subset P_n \dots \subset K$

$$Q_1 \subset Q_2 \dots \subset Q_n \dots \subset K_1$$

wobei $J(P_n) - J(P_{n-1}) \geq \frac{1}{2} (J(K) - J(P_{n-1}))$ sein soll.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } J(K) - J(P_{n+1}) &= J(K) - J(P_n) + J(P_n) - J(P_{n+1}) \leq \\ &\leq J(K) - J(P_n) + \frac{1}{2} (J(P_n) - J(K)) = \frac{1}{2} (J(K) - J(P_n)) \end{aligned}$$

$$\text{also } J(K) - J(P_1) \leq \frac{1}{2^{l-1}} (J(K) - J(P_1)) \leq \frac{1}{2^{l-1}} (J(K) - J(P_0))$$

$$\text{analog gilt } J(K_1) - J(Q_1) \leq \frac{1}{2^{l-1}} J(K_1)$$

$$\text{Wir haben } \frac{J(P_1)}{J(Q_1)} = \frac{r^2}{r_1^2} = e \text{ f\u00fcr alle } l.$$

$$\text{Behauptung: } \frac{J(K)}{J(K_1)} = e$$

Beweis: Setzen wir $J(K) - e J(K_1) = \epsilon$. Wir unterscheiden nun mehrere F\u00e4lle:

1) Ang.: $\epsilon > 0$

$$\epsilon = J(K) - e J(K_0) < \overbrace{J(P_1) - e J(Q_1)}^{= 0} + \frac{1}{2^l} J(K) = 2^{-l} J(K) \rightarrow \epsilon < \frac{1}{2^l} J(K)$$

f\u00fcr alle l .

Nach dem Axiom von Archimedes: $\exists l_0 \in \mathbb{N} \rightarrow J(K) \leq 2^{l_0} \epsilon$. Widerspruch

2) Ang.: $\epsilon < 0$, $-\epsilon = e J(K_0) - J(K)$

$$\begin{aligned} &< e J(Q_1) + \frac{J(K)}{2^l} - J(P_1) = \\ &= \frac{J(K_0)}{2^l} \end{aligned}$$

$$\exists l_1 \rightarrow 2^{l_1} (-\epsilon) > J(K_0) \quad \text{Widerspruch}$$

Aus 1) und 2) folgt $J(K) = e J(K_0)$, d.h. ϵ kann nur 0 sein.

Anhang zu § 10.

Bemerkungen zur Kreisberechnung

Fl\u00e4chenteilung

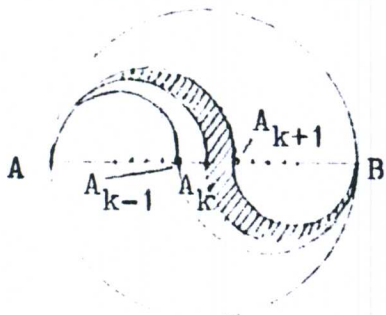
1. Beispiel: Teilung des Kreises in n gleiche Teile.



Abb. 49 1. Methode: Man teile 2π in n gleiche Teile.

Das geht mit Zirkel und Lineal nur, wenn $n = 2^r p_1 \dots p_s$, wo $p_1 \dots p_s$ verschiedene Primzahlen > 2 sind.

Allgemeine Methode von H. Brandt (1886-1954) 1927



Es sei $AB = 2r$
 Man teilt AB in n gleiche Teile
 $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$

Abb. 50 $\langle A_k, A_{k+1} \rangle = \langle \frac{2rk}{n}, \frac{2r(k+1)}{n} \rangle$
 $(k = 0, 1, \dots, n-1)$

R Kreisbogenbereich $A_k A_{k+1}$

$J(R) =$ Flächeninhalt des Halbkreises mit Radius

$$\frac{r(k+1)}{n} - \text{Fl.d.H. mit Radius } \frac{rk}{n} = \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{n^2} ((k+1)^2 - k^2) = \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{n^2} (2k+1)$$

G Kreisbogenbereich $A_k A_{k+1} B$

$$J(G) = \text{Fl.d.H. mit Radius } \frac{1}{2} (A_k B) - \text{Fl.d.h. mit Radius } \frac{1}{2} (A_{k+1} B) =$$

$$= \frac{\pi r^2}{2} \left[\left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 - \left(1 - \frac{k+1}{n}\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{\pi r^2}{2} \left[\frac{2}{n} - \frac{2k+1}{n^2} \right]$$

$$\rightarrow J(R) + J(G) = \frac{1}{n} \pi r^2$$

2. Mönchen des Hippokrates von Chios

Ibn Alhaitam (+ 1039)

A. de Lionne (1654)

G. Pardis (1671)

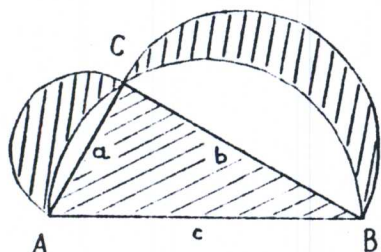


Abb. 51

G = Kreissichel über AC und
 Kreissichel über BC

$$J(G) = \frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} - \frac{\pi c^2}{8} + J(\Delta) =$$

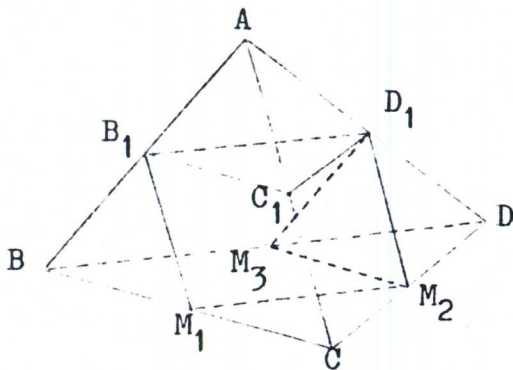
$$= J(\Delta) = \frac{ab}{2}$$

Dies ist die Berechnung eines krummlinig begrenzten Bereiches ohne Exhaustionsmethode!

Ist der Bereich ABC zerlegungsgleich zu den Mönchen des Hippokrates? In der Definition der Zerlegungsgleichheit:

$P = P_1 + \dots + P_s$, $Q = Q_1 + \dots + Q_x$ können jetzt die Bereiche P, Q, P_1, \dots auch "krumm" sein. Diese Erweiterung der Definition wurde vorgeschlagen von M. Rethy (Math. Ann. 38 (1891)) auf Anregung von J. König (1849-1913). Vorgänger W. Bolyai.

§ 12. Volumen der Pyramide



$T = BCDA$ (Tetraeder T)

$\pi =$ Prisma mit Basis BCD
und Deckfläche durch A

Abb. 52

$$T = T_1 + T_1' + \pi_1 + \pi_1'$$

$$\pi_1 + \pi_1' = S$$

π_1 Prisma $M_1 C M_2 C_1 D_1 B_1$

B_1, C_1, D_1 Halbierungspunkte

π_1' Prisma $B M_1 B_1 M_2 M_3 D_1$

T_1 Tetraeder $M_3 M_2 D_1 D$

T_1' Tetraeder $B_1 C_1 D_1 A$

$T_1 \cong T_1'$, ähnlich zu T, an der Kante AD aneinandergereiht

π_1 ähnlich zu π , π_1' volumsgleich zu π_1

$$J(\pi_1) = J(\pi_1') = \frac{1}{2^3} J(\pi), \quad J(S) = \frac{1}{2^2} J(\pi)$$

$$J(T) = 2J(T_1) + \frac{1}{2^2} J(\pi), \quad J(T_1) < J(\pi_1) = \frac{J(\pi)}{8}$$

Der Prozeß an T_1 wiederholt

$$T_1 = T_2 + T_2 + \pi_2 + \pi_2', [T_2 = T_1'' + T_2'' + \pi_1'' + \pi_2'']$$

$$J(T_1) = 2J(T_2) + \frac{1}{2^2} J(\pi_1), \quad J(T_2) \leq \frac{J(\pi_1)}{8} = \frac{J(\pi)}{8^2}$$

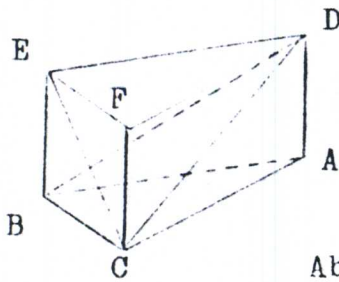
$$J(T) = 2^2 J(T_2) + J(\pi) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} \right)$$

$$\text{allgemein: } J(T) = 2^l J(T_1'') + J(\pi) \left(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^l} \right)$$

$$J(T_1) < \frac{J(\pi)}{8^l}$$

Jetzt $l \rightarrow \infty$ (unhistorisch?) ergibt

$$J(T) = J(\pi) \left(\frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{J(\pi)}{3}$$



Es sei nun das Prisma ABCDFE

$$P = T_1 + T_2 + T_3 \quad \text{wo}$$

T_1 Basis CEF Spitze D

T_2 Basis BCE Spitze D

T_3 Basis ABD Spitze C

Abb.53

$$J(T_1) = \frac{J(P)}{3} = J(T_2) = J(T_3)$$

Satz: Jedes Prisma lut sich in drei Tetraeder von gleichem Volumen zerlegen.

Historisch: gypter, Babylonier (unter Benützung des obigen Satzes?)
Zeigten für den Pyramidenstumpf

$$V = \frac{h}{3} (g_1 + \sqrt{g_1 g_2} + g_2)$$

Demokrit benutzte zur Herleitung die "atomistische" Methode
(Ein Körper ist eine Menge von Punkten), also das Prinzip von
Cavalieri (in moderner Ausdrucksweise).

Genauer Beweis: Eudoxus (-400)

§ 13. Es folgen bei Euklid der Nachweis folgender Sätze:

$$\underline{V(\text{Kegel}) = \frac{1}{3} V(Z)} \quad Z \text{ zugehöriger Zylinder}$$

$$\frac{V(\text{Kugel mit Radius } r)}{V(\text{Kugel mit Radius } r_1)} = \left(\frac{r}{r_1} \right)^3$$

Diese Untersuchungen wurden von Archimedes (- 287-212) fortgesetzt.

Er zeigte:

$$\underline{J_2(\text{Kreisfläche}) = \frac{1}{2} \text{Radius } r \cdot \text{Umfang } U.}$$

d.h. $J(O) = J(\Delta)$, wo Δ das Dreieck mit Grundlinie U und der Höhe r ist.

Weiters wird gezeigt.

$$\frac{31}{7} > \pi > 3 \frac{10}{71}$$

Archimedes bestimmt den Flächeninhalt der Parabel.

In der Schrift "Kugel & Zylinder" wird gezeigt

$$\underline{J_3(\text{Kugel}) = 4J_3(\text{Kegel})}$$

wobei, wenn die Kugel den Radius r hat, der Kegel als Grundfläche einen Kreis mit Radius r und die Höhe r hat.

Ist Z der Zylinder mit der Grundfläche Kreis mit Radius r und der Höhe $2r$, so ist

$$\underline{V(Z) = J_3(Z) = \frac{3}{2} V \text{ (Kugel)}}$$

Es ist die Oberfläche der Kugel = $4 \times$ Fläche des Hauptkreises.

Weiters stammen von ihm Volumsberechnungen von Paraboloiden, Hyperboloiden und Flächenberechnungen von Spiralen. Sein Schüler Heron berechnet das Volumen des Torus.

Werke von Heron sind:

Vermessungslehre, Geometrica. Hier finden sich auch mechanische Hilfsmittel zur Berechnung von Flächeninhalten und Volumina.

§ 14. Genealogie der Exhaustoren

Wir geben eine Liste:

Heron (-70)

Pappus (300)

China: Zhang Heng (78-139). Er zeigt $\pi \sim \sqrt{10}$

LIUHUI (Mathematik in neun Büchern) bestimmt die Kreisfläche durch $k2^n$ -Ecken, welche im Kreis eingeschrieben sind.

Indien: Brahmagupta 598

Arabien: IBN QURRA (830-901), Al-KUHI

Alhuzen (965-1039)

(ABU'ALI AL-HASAN IBN AL-HASAN IBN AL-HAITHAM)

Gerbert (940-1030), Psellos (1018-1078) zeigt $\pi = \sqrt{8}$

Svadirā um 1100

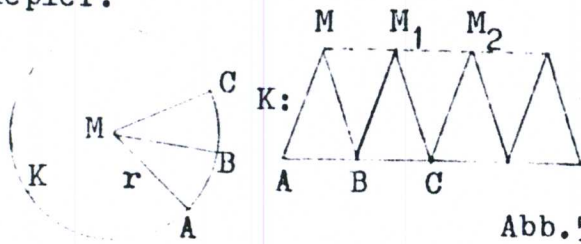
Leonardo von Pisa 1220

Leonardo da Vinci (1452-1519). Der berühmte Maler bestimmt den Flächeninhalt der Ellipse.

Tartaglia (1449-1557)

Kepler (1571-1632) Wir heben das Buch "Neue Stereometrie der (Wein)-Fässer" hervor, mit einer Ergänzung zur Stereometrie des Archimedes (Linz 1615).

Hier eine kleine Skizze zur Bestimmung des Kreisinhalts nach Kepler.



Es ist U der Umfang, Fl. = $\frac{1}{2} U \cdot r$

Abb. 54, 55

Beweis:

Das Dreieck ABM ist bei AB unendlich schmal. Das gleiche gilt für BCM usw. Es werden die Dreiecke MM_1B , MM_1M_2C usw. hinzugefügt. Wir heben noch die Keplersche Faßregel hervor.

§ 15. Wir kommen nun zum Prinzip von Cavalieri.

Cavalieri (1598-1647) Schüler von Galilei

Vorgänger: Heron, Archimedes, Kepler

Weitere Namen: Schwanter (1585-1626)

Nachfolger: Fermat, Pascal, Leibniz

Es sei M eine Menge in der Ebene, dann gilt

$$M = \int_0^h U(s(h)) dh$$

Zerlegung in Schichten (Blätter) $s(h)$

Es sei $J = F(M)$ der Flächeninhalt von M

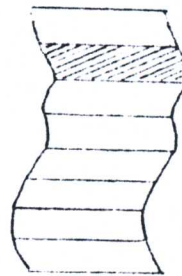
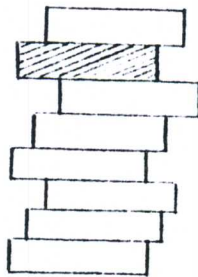
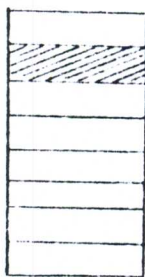


Abb. 56-59

$\int_a^b l(s(h)) dh = \text{Flächeninhalt } J$, wo $l(s(h))$ die Länge der Schicht $s(h)$.

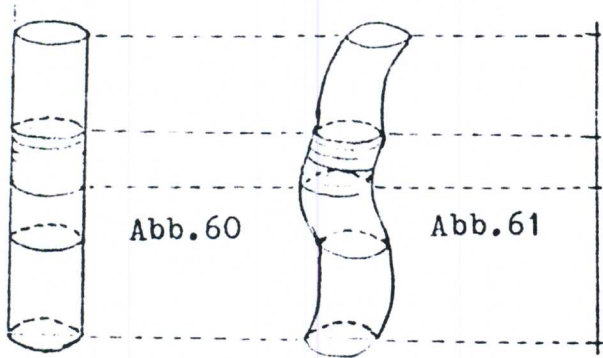
d.h. Indivisible (Punkte dh). Es ist also modern

$$J = \int_a^b l(s(x)) dx.$$

Cavalieri zeigt

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Jetzt im Raum. Es gilt wieder $M = \bigcup_h F(h)$. Ist $J_2(F(h))$ der Flächeninhalt von $F(h)$, so ist das Volumen $J_3(M) = \int_a^b J_2(F(x)) dx$



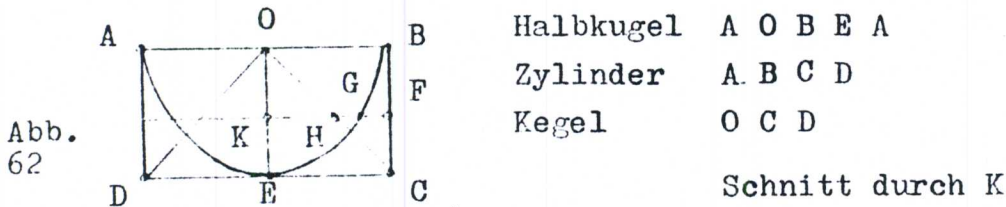
$$M_1 = \bigcup_h (F_1(h)), \quad J_3(M_1) = \int J_2(F_1(x)) dx$$

Vors.: Ist $\forall h: J_2(F(h)) = J_2(F_1(h))$, dann ist (Prinzip von

Cavalieri: $J_3(M) = J_3(M_1)$.

Beispiele von Cavalieri:

1) Kugelvolumen



Kreis mit Radius KG, KF, KH

$$GK^2 + KO^2 = OG^2, \quad KO = HK, \quad OG = FK$$

$$\rightarrow GK^2 + HK^2 = FK^2 \rightarrow \pi GK^2 + \pi MK^2 = \pi FK^2$$

$$J_2(GK) + J_2(HK) = J_2(FK)$$

\rightarrow Vol (Halbkugel) + Vol (Kegel) = Vol (Zylinder)

$$V_1 + V_2 = V_3$$

$$V_2 = \frac{1}{3} V_3, \quad V_1 = \frac{2}{3} V_3$$

2) Flächeninhalt der Ellipse:

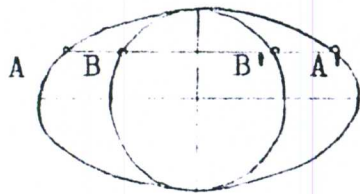


Abb.63

Es ist

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{J_2(\text{Ellipse})}{J_2(\text{Kreis})} = \frac{a}{b}$$

also ist

$$J_2(\text{Ellipse}) = \pi b^2 \frac{a}{b} = \pi a b$$

Weitere Beispiele

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \quad (n \leq 9)$$

In Japan wurde dieses Prinzip von Seki Kôwa (1670) entwickelt: Prinzip Yenri.

§ 16. Zeitgenossen und Nachfolger von Cavalieri:

Guldin (1577-1643) (Guldinsche Regeln)

Weiter

Gregorius A.St. Vincentio (1584-1667). Er zeigt

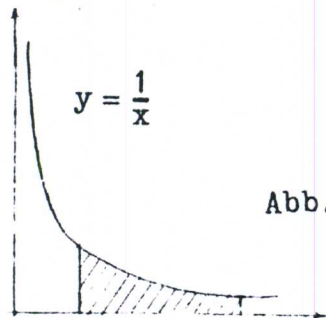


Abb.64

1) Ist

$$\int_1^t \frac{dx}{x} = f(t) \text{ so ist } f(uv) = f(u) + f(v)$$

also die Funktionalgleichung des Logarithmus

2) Wenn für alle n : $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, so ist $\frac{\lim x_n}{\lim y_n} = \frac{a}{b} = \lim \frac{x_n}{y_n}$.

Weiters erwähnen wir

E. Toricelli (1644), Wallis 1655 (1616-1703)

B. Pascal (1632-1662)

Fermat (1601-1665)

Huygens (1629-1695) Bogenlänge

Barrow (Lehrer Newtons) (1630-1677) und Leibniz.

Sie bestimmen die Inhalte der Ordinatenmengen von Funktionen.

V = Volumen von Ordinatenmengen:

F = Flächeninhalt von Ordinatenmengen, Zerlegung in Säulen

Zerlegung in Streifen:

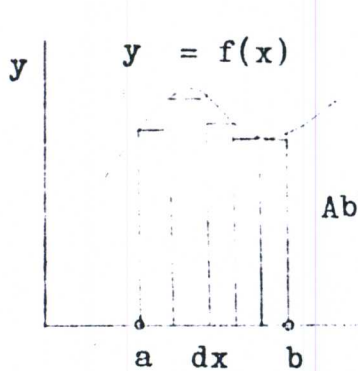


Abb.65

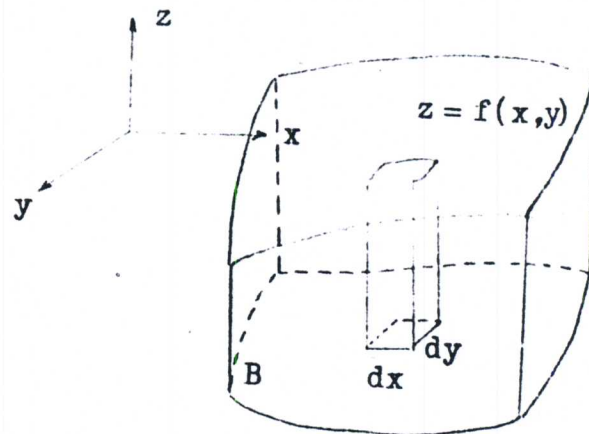


Abb.66

Euler:

$$(1707-1783) \quad F = \sum' y \, dx = \int_a^b f(x) \, dx, \quad V = \iint_B z \, dx \, dy$$

Exakte Begründung (d.h. ohne unendliche Größen) finden wir bei

Cauchy (1784-1857) 1823,

Riemann (1826-1866) 1853,

und Darboux (1842-1917) (Ober- und Untersummen)

(Für $f(x) = ax$ bereits bei Archimedes)

Mit unendlich kleinen Größen finden wir es bei Schmieden, Laugwitz, Robinson, Luxemburg

Bemerkung: Es sei z die Indikatorfunktion von B , so ist $z = 1$ auf B : $\iint_B z \, dx \, dy = J_2(B)$. Wir haben so den Zusammenhang zwischen dem Integral als Funktional und dem Inhalt.

Es liegt jetzt folgende Frage nahe:

Für welche Polyeder kann das Volumen ohne Exhaustionsmethode bestimmt werden? In der Ebene geht es für alle Polygone nur mit Zerlegung in Teilpolygone. Ist so etwas auch im Raum möglich? Ist die Exhaustionsmethode wirklich beim Tetraeder, wie dies bei Euklid der Fall ist, notwendig? Es stecken doch in dieser Methode Grenzwertprozesse, also nicht finite Prozesse! Die Griechen haben gerade nichtfinite Prozesse nach Möglichkeit vermieden. Dies ist heute aktueller als je: man vermeide das Unendliche, so weit wie möglich!

Solche Bedenken hat schon Gauß gehabt. Wir zitieren Hilbert!

Hilbert, Mathematische Probleme 1900:*

Problem 3. Die Volumengleichheit zweier Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe.

Gauß spricht in zwei Briefen an Gerling sein Bedauern darüber aus, daß gewisse Sätze der Stereometrie von der Exhaustionsmethode, d.h. in der modernen Ausdrucksweise von den Stetigkeitsaxiomen, abhängig ist.

Gauß nennt insbesondere den Satz von Euklid, daß dreiseitige Pyramiden von gleicher Höhe sich wie die Grundflächen verhalten. Dennoch erscheint uns der Beweis des oben genannten Satzes auf diese Weise nicht möglich. Der Unmöglichkeitbeweis wäre erbracht, sobald es gelänge, zwei Tetraeder mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe anzugeben, die sich auf keine Weise in kongruente Tetraeder zerlegen lassen, und die sich auch durch Hinzufügung kongruenter Tetraeder nicht zu solchen Polyedern ergänzen lassen, für die ihrerseits eine Zerlegung in kongruente Tetraeder möglich ist.

* (8.4.1844 und 17.4.1844, Werke VIII S. 241, 244)

§ 18. Diese Vermutung ist von Max Dehn (1878-1952) 1901 in der Arbeit "Über den Rauminhalt" M.A. 55, 465-78 bestätigt worden. M. Dehn war damals Assistent an der TU Karlsruhe, dann Professor in Frankfurt bis 1935, zum Schluß Professor in USA (vgl. C.L. Siegel, Zur Geschichte des Frankfurter Mathematischen Seminars, Ges. Abh. III).

M. Dehn zeigt nun: Es seien P, P' Polyeder mit den Neigungswinkeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bzw. β_1, \dots, β_m , dann gibt es ganze Zahlen L_1, \dots, L_n, L, M bzw. $L'_1, \dots, L'_m, L', M'$, so daß

$$\begin{aligned} L_1 \alpha_1 + \dots + L_n \alpha_n + (L + 2M) \pi &= \\ L'_1 \beta_1 + \dots + L'_m \beta_m + (L' + 2M') \pi & \end{aligned} \quad (*)$$

wenn P und P' zerlegungsgleich sind.

Vorgänger sind: Rausenberger (1893)

Bricard (1896)

Sforza (1897)

Es gilt eine analoge Relation, wenn P und P' ergänzungsgleich sind.

Diese Relation war bereits von Rausenberger ohne Beweis aufgestellt worden.

Wenden wir $(*)$ auf $P =$ reguläres Tetraeder, $P' =$ Würfel an.

Dann ist $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ mit $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ und $\alpha'_1 = \frac{\pi}{2}$

Wir haben also eine Gleichung

$$n\alpha = \frac{m\pi}{2}$$

Wir können o.B.d.A. $(n,m)=1$ annehmen

Es ist $\sin \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$, also

$$\cos n\alpha + i \sin n\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \underline{\underline{\left(\frac{1+i\sqrt{8}}{3}\right)^n}}$$

Wir unterscheiden 2 Fälle:

1) $m \equiv 1 \pmod{2}$. Dann ist $\cos n\alpha = 0$

$$\rightarrow \cos n\alpha = \operatorname{Re} \left(\frac{1+i\sqrt{8}}{3}\right)^n$$

$$1 - \binom{n}{2} 8 + \binom{n}{4} 8^2 \pm \dots = 0$$

also $1 \equiv 0 \pmod{8}$ - Widerspruch

$$2) \quad m \equiv 0(1) \rightarrow n \equiv 1(2)$$

$$\rightarrow \sin n\alpha = 0$$

$$\sin n\alpha = \operatorname{Im}\left(\frac{1+i\sqrt{8}}{3}\right)^n$$

$$n - \binom{n}{3}8 + \binom{n}{5}8^2 \dots = 0$$

Es ist also das gleichseitige Tetraeder nicht zerlegungsgleich einem Würfel.

Anhang zu § 18.

Beweis der Relation von Dehn nach Kagan (1869-1953) MA 57(1903)
S. 421

P Kantenwinkel $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

P' Kantenwinkel β_1, \dots, β_m

Es sei $P = P_1 + \dots + P_S$, $P' = P'_1 + \dots + P'_S$, $P_j \approx P'_j$

Es sei k Kante von P_L . Es werden gewisse Polyeder P_j die Kante k in Intervalle (Zerlegungsstrecken) zerlegen. Es sei z eine solche Zerlegungsstrecke. Es seien $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_{r(z)}$ jene Polyeder, welche an z angrenzen. Das Polyeder \bar{P}_j ($j=1, \dots, r(z)$) möge in z den Kantenwinkel $\bar{\tau}_j$ haben. Es gibt dann 3 Möglichkeiten:

1) k, und damit z, liegen im Inneren von P. Dann ist

$$\bar{\tau}_1 + \dots + \bar{\tau}_r = T(z) = 2\pi$$

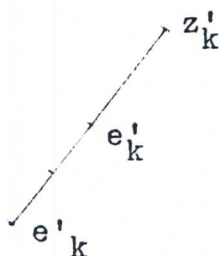
Liegt zweitens k auf einer Seitenfläche von P, dann ist

$\bar{\tau}_1 + \dots + \bar{\tau}_r = T(z) = \pi$. Liegt aber drittens k auf einer Kante von P mit Kantenwinkel α , dann ist

$$\bar{\tau}_1 + \dots + \bar{\tau}_r = T(z) = \alpha$$

In P werden die \bar{P}_k durch gewisse Bewegungen jetzt in der Lage \bar{P}'_k ($j=1, \dots, r(z)$) sein. Dabei wird z mitgeführt und liegt als kongruente Strecke z'_k ($k=1, \dots, r(z)$) auf \bar{P}'_k . Die z'_k werden durch Polyeder P'_1 , welche an \bar{P}'_k angrenzen in Intervalle e_{kl} (Elementarstrecken) zerlegt. Die Zerlegung nennen wir E_k .

E_k :



$$z'_k = e_{k1} + \dots + e_{kl} \quad k = 1 \dots r$$

e_{kj} Elementarstrecke

Def.: $\bigcup_{k=1}^r E_k = E, \text{ Card } E = M(z)$

Def. $\text{Card } (E \cap e_{kj}) = m(e_{kj})$
 $= \text{Ma\ss von } e_{kj}$

Es ist $\sum_{i=1}^{lj} m(e_{kj}) = M(z)$

Def.: $\bar{\tau}(e_{kj}) = \bar{\tau}_k$
 $= \text{Argument von } e_{kj}$

(e) Menge aller Elementarstrecken e, welche in P bzw. in P' auftreten. Es sei m(e) die Masse von e. $\bar{\tau}(e)$ das Argument von e.

$$\begin{aligned} \sum_e m(e) \tau(e) &= \sum_z \sum_{k \leq r(z)} \sum_{j \leq l_k} m(e_{kj}) \tau(e_{kj}) = \\ &= \sum_z \sum_k \tau_k \sum_j m(e_{kj}) = \sum_z T(z) M(z) \end{aligned}$$

analog ist

$$\sum_e m(e) \tau(e) = \sum_{z'} T(z') M(z')$$

Zerlegungsstrecken in P'

$$\sum_z T(z) M(z) = \underbrace{\sum'_z T(z) M(z)}_{\text{im Inneren von P}} + \underbrace{\sum''_z T(z) M(z)}_{\text{auf einer Seitenfl\u00e4che von P}}$$

$$+ \sum_z T(z) M(z)$$

Kante von P

$$= 2\pi \sum'_z M(z) + \sum'_z M(z) + \sum_{r=1}^n \alpha_r \sum_{z \in \text{Seite}} M(z)$$

Seite Kante mit Winkel α_r

$$= 2\pi M + \pi L + \sum_{k=1}^n \alpha_r L_r$$

analog

$$\sum_{z'} T(z') M(z') = 2\pi M' + \pi L' + \sum_{s=1}^m L_s' \beta_s$$

$$\rightarrow 2\pi M + \pi L + \sum_{r=1}^n L_r \alpha_r = 2\pi M' + \pi L' + \sum_{v=1}^m L_v' P_v$$

§ 19. M. Dehn hatte noch andere notwendige Bedingungen aufgestellt, Es blieb offen, ob sie hinreichend sind (Vorarbeiten von Hadwiger). Dieses Problem wurde von

J.P. Sydler

gelöst. Sydler ist Oberbibliothekar an der ETH in Zürich.

Er zeigt zunächst: sind zwei Polyeder P, P' ergänzungsgleich, so sind sie zerlegungsgleich (1943-44).

Dann zeigte er in Vorarbeiten (1942-43), (Comm. Helv. 16, 266-273), 1952 (Elemente der Math. 7 (49-53), 1953 (Elemente der Math. 8, 75-7), 1959 weitere Reduktionen des Problems auf einfache Bedingungen. 1965 gelang ihm die endgültige Lösung des Problems in Comm. Helv. 40 (1965-66), S. 43-80. Man kennt jetzt also die notwendigen und hinreichenden Bedingungen. Am 2. Dezember 1966 wurde ihm in Bern die Goldmedaille der Königlich-Dänischen vom dänischen Botschafter überreicht.

Jessen hat 1968 in Math. Scand. 22 einen mehr algebraischen Beweis geführt. Der Beweis operiert mit homologischer Algebra.

Anhang zu § 19.

Ergänzungen zum Satz von Dehn

1) Es sei (v_i) eine Basis (Hamelbasis) des Vektorraumes R , d.h. jedes $\alpha \in R$ hat die Gestalt

$$\alpha = \sum_j q_j v_j$$

$q_j \in Q$ (Nur endlich viele $q_j \neq 0$).

Die (v_j) heißen linear unabhängig über Q .

Hadwiger hat gezeigt: Es sei P ein Polyeder mit den Kantenwinkeln $\alpha_1, \dots, \alpha_w$ mit den Kantenlängen l_1, \dots, l_w . Es sei

$$\alpha_j = q_{j0} \pi + \sum_k q_{jk} v_k$$

Dann ist $P \stackrel{z}{\cong}$ Würfel $\rightarrow \forall k$ ist $\sum_j q_{jk} l_j = 0$

Diese Bedingung ist zur Bedingung von Dehn äquivalent.

2) Die alg. Formulierung bei Jessen: Es seien $(A,+)(X,+)$ abelsche Gruppen. Weiter sei

$$F: A^2 \rightarrow X \text{ mit } 1) F(a,b) = F(b,a) \\ 2) F(a,b) + F(a+b,c) \\ = F(b,c) + F(a,b+c)$$

Problem: Wann existiert ein $f: A \rightarrow X$, so daß

$$F(a,b) = f(a+b) - f(a) - f(b)$$

Bedingungen 1, 2 sind notwendig.

Jessen löst es, wenn A frei ist oder X divisibel ist.

§ 20. W. Süss (1895-1958) hat eine Methode entwickelt, um ohne Exhaustion das Volumen von Polyedern zu definieren

W. Süss, M.A. 82, 297-305 (1920)

$$\text{Def. 1} \quad T_1 \stackrel{Z}{\cong} T_2 \quad (T_1 \text{ ist cavalieri-gleich zu } T_2)$$

wenn Grundfläche $(T_1) = \text{Grundfläche } (T_2)$

und auch gilt

$$\text{Höhe } (T_1) = \text{Höhe } (T_2)$$

$$\text{Def. 2} \quad P_1 \stackrel{Z}{\cong} P_2, \text{ wenn}$$

$$\exists T_1, \dots, T_s, T'_1, \dots, T'_s \text{ mit } P_1 = T_1 + \dots + T_s, P_2 = T'_1 + \dots + T'_s$$

$$\text{und } T_1 \stackrel{Z}{\cong} T'_1, \dots, T_s \stackrel{Z}{\cong} T'_s$$

$$\text{Def. 3} \quad P_1 \stackrel{Z}{\cong} P_2, \text{ wenn } \exists T_1, T_2 \text{ so daß}$$

$$T_1 \stackrel{Z}{\cong} T_2$$

und

$$P_1 + T_1 \stackrel{Z}{\cong} P_2 + T_2$$

Def. 4

$$J(T) = \frac{1}{3} gh$$

g Grundfläche, h zugeh. Höhe

Def. ist zulässig ($g_1 h_1 = g_2 h_2 = g_3 h_3$)

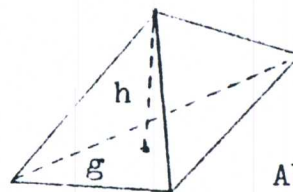


Abb.67

Def. 5

$$P = T_1 + \dots + T_s$$

$$J(P) = J(T_1) + \dots + J(T_s)$$

Def. zulässig.

Satz von W. Süss: Es ist $J(P_1) = J(P_2)$

$$\leftrightarrow P_1 \stackrel{e}{\underset{c}{\approx}} P_2$$

§ 21. Wir kommen nun zu den mengentheoretischen Definitionen des Inhalts

1) Der Cantorsche Inhalt
Cantor (1845-1918)

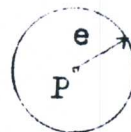


Abb.68

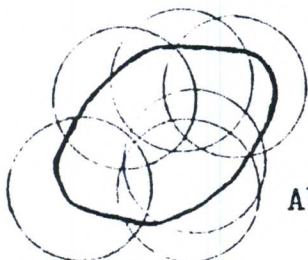


Abb.69

$K(P, e)$:

$$\bigcup_{P \in A} K(P, e) = A(e)$$

$$\mu_c(A) = \lim_{e \rightarrow 0} A(e)$$

μ_c ist nicht additiv

(Bsp. $E_1: 0 \leq x \leq 1$ $\mu_c(E_1 \cap \mathbb{Q}) = \mu_c(E_1 \cap \text{Irr}) = \mu_c(E_1) = 1$)

2) Der Inhalt nach Peano und Jordan

G. Peano (1858-1932) 1880

Applicazione geometriche del calcolo infinitesimale. Torino 1887

C. Jordan (1838-1922) J. de Math. (4) 8, 69-99 (1892)

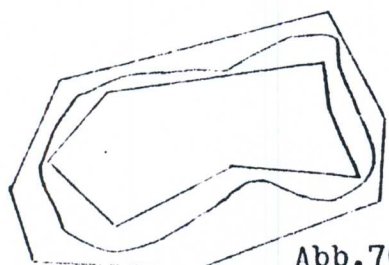


Abb.70

Innerer Inhalt:

$$\underline{J}(A) = \sup_{P \subset A} J(P)$$

Äußerer Inhalt:

$$\overline{J}(A) = \inf_{P' \supset A} J(P')$$

Es ist $\underline{J}(A) \leq \bar{J}(A)$

Def. A besitzt einen Inhalt (im Peano-Jordanschen Sinne oder auch im Sinne von Riemann (1826-1866) oder ist quadrierbar, wenn

$$\underline{J}(A) = \bar{J}(A)$$

und es besitzt den Inhalt $J(A) = \underline{J}(A) = \bar{J}(A)$.

Damit hat die Exhaustionsmethode die Form der Definition angenommen!

Spezielle Arten von Polyedern

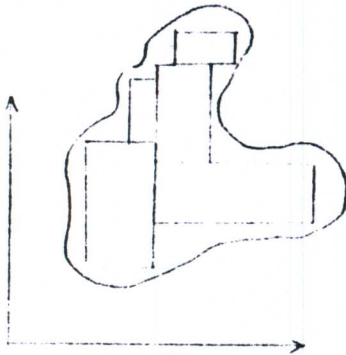


Abb.71

- 1) Vereinigung disjunkter Rechtecke (Quader), welche zu festen Seiten (Achsen) parallele Seiten haben.
- 2) Statt Rechtecke in 1) Quadrate (Würfel)
- 3) Quadrate aus einem Gitter G_m (Würfel)

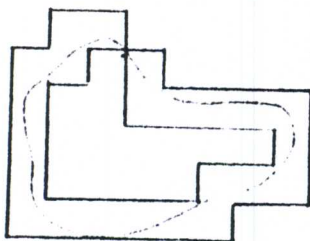


Abb.72

$$G_m \text{ im } \mathbb{R}_2 \begin{cases} \frac{k}{m} \leq x < \frac{k+1}{m} \\ \frac{l}{m} \leq y < \frac{l+1}{m} \end{cases}$$

$$m \in \mathbb{N}$$

$$(k, l) \in \mathbb{Z}^2$$

$$G_m \text{ im } \mathbb{R}_3 \begin{cases} \frac{k_1}{m} \leq x_1 < \frac{k_1+1}{m} \\ \frac{k_2}{m} \leq x_2 < \frac{k_2+1}{m} \\ \frac{k_3}{m} \leq x_3 < \frac{k_3+1}{m} \end{cases}$$

4) $m = \frac{1}{10^n}$ (oder $\frac{1}{2^n}$) Millimeterpapier

$$G_{10^n} = G(n)$$

$$P_n \subset A \subset P'_n$$

P_n = Menge der Gitterwürfel aus $G(n)$ in A

P'_n = Menge der Gitterwürfel, welche A überdecken

$$\underline{J}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(P_n)$$

$$\overline{J}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(P'_n)$$

$$J(P_n) = \sum J(W)$$

$$J(W) = \left(\frac{1}{10^n}\right)^2 \text{ bzw. } \left(\frac{1}{10^n}\right)^3$$

Gitterwürfel $W \subset A$

Eine andere Variante bei E. Schmidt (1876-1959): M.Z. 12 (1922).
Die Quadrate liegen nicht wie in 1) zu festen Achsen parallel.

§ 22. Wir wollen auch einiges über die
Definition von Oberflächen und Bogenlängen sagen.

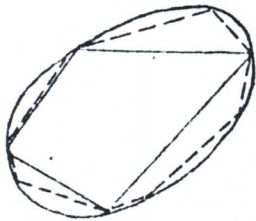


Abb. 73

Es sei C eine Kurve. Wir betrachten eine Folge von Polygonen P_n : welche C eingeschrieben sind. Dabei sei $P_n \subset P_{n+1}$.
Dann sei $\lim_{n \rightarrow \infty} l(P_n) = l(C)$, der Umfang von C , wenn $l(P_n)$ der Umfang von P_n ist bzw. $L(C) = \sup (P) \mid P \text{ in } C \text{ eingeschrieben}$.

Schaeffer (1858-1885) und C. Jordan (1838-1922) haben den Begriff der Bogenlänge studiert. Bei dem Begriff des Inhalts einer Oberfläche ist dies schwieriger. Es sei F eine differenzierbare Fläche. Weiters sei (P_n) eine Folge eingeschriebener Polyeder mit $P_n \subset P_{n+1}$, dann wäre der Versuch einer Definition: $\lim_{n \rightarrow \infty} O(P_n) = O(F)$ oder $O(F) = \sup_P O(P)$.
Das geht aber nicht.

H.A. Schwarz (1843-1921) und G. Peano (1858-1932) haben das folgende Gegenbeispiel gegeben:

Wir betrachten einen Zylinder Z von der Höhe 1 und dem Radius $r = \frac{e}{2\pi}$. Die Konstruktion verläuft so: Dem Basiskreis des Zylinders wird ein regelmäßiges m -Eck eingeschrieben. Über jede Seite des m -Ecks wird ein Dreieck Δ_1 mit der Höhe h_{nm} errichtet, dessen Spitze auf Z liegt und dessen Projektion auf den Zylinder die Höhe $\frac{1}{n}$ hat. Die Gesamtheit dieser Dreiecke sei B , ihr Flächeninhalt $J(B)$. Die Menge der Spitzen aller Δ_1 bilden wieder m -Ecke auf einem Parallelkreis zum Basiskreis. Die vorher geschilderte Konstruktion kann wiederholt werden. Dies geht n -mal. Das so entstandene Polyeder heiße P_{nm} .

Es ist

$$h_{nm} = \sqrt{r^2(1 - \cos \frac{\pi}{m})^2 + \frac{1}{n^2}} \geq r(1 - \cos \frac{2\pi}{m}),$$

$$J(\Delta_1) \geq r^2(\sin \frac{\pi}{m})(1 - \cos \frac{\pi}{m}) \rightarrow J(B) \geq r^2(m \sin \frac{\pi}{m})(1 - \cos \frac{\pi}{m}).$$

Es ist also

$$J(P_{nm}) \geq nr^2(1 - \cos \frac{\pi}{m}) \geq c \frac{n}{m^2} e^2. \text{ Wir nehmen nun } n = m^3 \text{ und erhalten}$$

(c absolute Konstante) $J(P_{m^3, m}) \geq c m e^2, \text{ also}$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(P_{m^3, m}) = \infty$$

Zur Definition der Oberfläche hat Lebesgue vorgeschlagen, nur solche Folgen von eingeschriebenen Polyeder P_n zu betrachten, so daß $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = F$ ist und die Folge der Tangentialebenen von P_n gegen die Tangentialebene von F konvergiert.

Wir geben eine Liste von Mathematikern, die sich mit diesem Problem beschäftigt haben: Minkowski, T.Rado, Tonelli, de Geöcze, Cesari.

§ 23. Einige Sätze über den Inhalt

Es sei Ω_J die Menge aller quadrierbaren Mengen. Es gilt:

$$\text{Wenn } A \in \Omega_J, B \in \Omega_J \rightarrow A \cup B \in \Omega_J, A \cap B \in \Omega_J, A - (A \cap B) \in \Omega_J$$

(Es ist Ω_J ein Mengenkörper). Weiters ist

$$J(A_1 + \dots + A_n) = J(A_1) + \dots + J(A_n)$$

$$(A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j)$$

Nicht jede Menge $\in \Omega_J$!

Beispiel: Es sei $E = \{0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Q}, 0 \leq y \leq 1\}$,

$$\text{dann ist } \bar{J}(E) = 1, \underline{J}(E) = 0$$

Man kann zeigen (nichttrivial): J ist bewegungsvariant d.h.

$$J(\sigma A) = J(A), \text{ wenn } \sigma \text{ eine Bewegung ist.}$$

Es gilt allgemein: Ist α die lineare Abbildung

$$\alpha: \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{cases}$$

$$\text{Ist } \text{Det}(\alpha) = \Delta, \text{ dann ist } J(\alpha A) = |\Delta| J(A)$$

Def. α = inhaltstreue affine Abbildung, wenn $|\Delta| = 1$.

Satz 1: Es ist dann

$$J(\alpha A) = J(A)$$

Satz 2: Wenn $x' = \lambda x + b_1$

$$y' = \lambda y + b_2$$

dann ist

$$J(\alpha A) = \lambda^2 J(A)$$

§ 24. Das Lebesguesche Maß

Erweiterung der Definition des Inhalts zum Maß:

E. Borel (1871-1956)



offen, beschränkt

Jede offene Menge O ist bekanntlich Summe $\cup_j W_j$ von abzählbar vielen (achsenparallelen) Würfeln W_j mit $W_j \cap W_k = \emptyset$, wenn $j \neq k$. Dann definiert Borel

$$\mu_B(O) = \sum_j \mu(W_j)$$

($\mu(W)$ Volumen von W). Diese Definition ist nur von O abhängig, nicht von der Darstellung $\cup_j W_j$. Ist weiter K eine kompakte Menge, dann definiert Borel

$$\mu_B(K) = \mu_B(W) - \mu_B(W - K)$$

Dabei ist W ein offener Würfel mit $W \supset K$, also ist $W - K$ offen. Es ist $\mu_B(K)$ von W unabhängig.

H. Lebesgue (1875-1941) gab 1902 folgende Definitionen:

Äußeres Maß $\mu(A) = \inf_{A \subset O} \mu_B(O) = \inf_{A \subset O} \underline{J}(O)$, (O offen)

Inneres Maß $\underline{\mu}(A) = \sup_{K \subset A} \mu_B(K) = \sup_{K \subset A} \bar{J}(K)$ (K kompakt, d.h. abgeschlossen und beschränkt)

Es ist stets $\underline{\mu} \leq \bar{\mu}$

Def.: Ist $\mu_L(A) = \underline{\mu}(A) = \bar{\mu}(A)$, dann ist A meßbar im Sinne von Lebesgue.

Es sei Ω_L = Menge der meßbaren Mengen in $\mathbb{R}_2(\mathbb{R}_3)$: Ω_L ist Mengenkörper. Weiters sind $A_1, A_2, \dots, A_j \in \Omega_L \rightarrow \cup_j A_j \in \Omega_L$ und

$$\mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j), \text{ wenn } A_j \cap A_k = \emptyset \text{ f\u00fcr } j \neq k.$$

(Totale Additivit\u00e4t). Weiters ist $\Omega_j \subset \Omega_L$

Es ist wieder μ_L bewegungsinvariant.

§ 25. Einige S\u00e4tze zur Inhalts- und Ma\u00dftheorie.

Es ist

- 1) $\underline{J}(A) \leq \underline{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(A) \leq \bar{J}(A)$
- 2) (a) $\bar{J}(\emptyset) = 0,$
(b) $\bar{J}(A) \leq \bar{J}(B),$ wenn $A \subset B$ (Euklid)
(c) $\bar{J}\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) \leq \sum_{k=1}^N \bar{J}(A_k);$

analog gilt alles, wenn \bar{J} durch $\bar{\mu}$ ersetzt wird.

Es ist dann $N = \infty$ zugelassen.

- 3) $\underline{J}(A) = J(W) - \bar{J}(W - A),$ wenn der W\u00fcrfel W die Menge A enth\u00e4lt
 $\underline{\mu}(A) = J(W) - \bar{\mu}(W - A)$

- 4) A ist genau dann me\u00dfbar, wenn f\u00fcr jedes B

$$\bar{\mu}(B) = \bar{\mu}(B \cap A) + \bar{\mu}(B - A)$$

(Carath\u00e9odory (1873-1956))

- 5) J und μ sind vollst\u00e4ndig, d.h. wenn
 $A \in \Omega_J \leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists A_1, A_2 \in \Omega_J$ mit $A_1 \subset A \subset A_2$ und $J(A_2 - A_1) < \epsilon$
(analog f\u00fcr Ω_L)
- 6) A ist quadrierbar, wenn f\u00fcr jedes $\epsilon > 0$ W\u00fcrfel Aggregate (Figuren) W_1, W_2 mit $W_1 \subset A \subset W_2$ mit $J(W_2 - W_1) < \epsilon$ existieren;
 A ist me\u00dfbar, wenn f\u00fcr jedes $\epsilon > 0$ eine offene Menge O und eine kompakte Menge K mit $K \subset A \subset O$ gibt, so da\u00df $\mu(O - K) < \epsilon$ gilt.
- 7) Bemerkung: W\u00e4hlt man bei der Definition des Inhaltes und des Ma\u00dfes W\u00fcrfelaggregate, so ist schon bei der Berechnung von Parallelogrammen bzw. Quadern die Exhaustionsmethode erforderlich!
- 8) Nicht jede Menge ist me\u00dfbar im Lebesgueschen Sinne. Dazu gen\u00fcgt es zu zeigen: Es sei S_1 der Einheitskreis, Mittelpunkt O . Es gibt auf S_1 kein Ma\u00df μ_L f\u00fcr alle Mengen au\u00df\u00e4r $\mu \equiv 0$. Es sei $O_1 =$ Gruppe aller Drehungen um den Nullpunkt O . Es sei

$\sigma \in O_1$ von unendlich hoher Ordnung, d.h. σ sei eine Drehung, so daß aus $\sigma^n = 1$ folgt $n=0$. Es sei $H = (\sigma^n) (n \in \mathbb{N}^0)$.

Es sei P Punkt auf S_1 und

$$\sigma^n P = P_n$$

Auf S_1 wird folgende Klasseneinteilung getroffen:

$x \sim y$, wenn $\exists h \in H$ mit $hx = y$. Die Klassen seien (K_j) . Wir nehmen aus jeder Klasse ein Element x_j . Es sei $C = (x_j)$. Wir bilden $(hx_j) = hC = C_h$. $C_h \cap C_k = \emptyset$, wenn $h \neq k$. Es ist $S_1 = \sum_h C_h$.

Wäre nun jedes C_h meßbar, so wäre $\mu(S) = \sum_h \mu(C_h)$.

Weiters müßte $\mu(C_h) = \mu(C)$ sein, also $\mu(C) = 0$, also $\mu(S_1) = 0$.

(Bemerkung: Es sei $M = \{P_0, P_1, \dots\}$, wo $P = P_0$, $P_1 = \sigma P, \dots$, dann

ist $\sigma M = \{P_1, P_2, \dots\} = M - P_0$, also $M \stackrel{Z}{\approx} M - P$).

Dieses Beispiel ist von Hausdorff (1914).

Das erste Beispiel ist von Vitali (1875-1932) im Jahre 1905 gegeben worden.

Anhang von § 25. Eine gruppentheoretische Definition des Maßes.

A. Haar (1885-1933) hat eine andere Definition des Maßes gegeben.

Es sei (K_n^0) eine Folge von offenen Kugeln mit Mittelpunkt O und Radius r_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$. Es sei W der Einheitswürfel. Es sei nun

K eine kompakte Menge. Es gibt daher nur eine endliche Zahl s von Kugeln $K_n^{(j)}$ ($j=1, \dots, s$), welche zu K_n^0 kongruent sind und K überdecken.

Wir definieren nun

$$h_n(K, K_n^0) = \inf S$$

und weiter sei

$$m_n(K, K_n^0) = \frac{h_n(K, K_n^0)}{h_n(W, K_n^0)}$$

Es ist $m_n(W, K_n^0) = 1$.

Man kann nun zeigen ($\lim_B =$ Banachlimes):

Es ist

$$\lim_B m_n(K, K_n^0) = \mu_B(K).$$

Es ist $\mu_B(\sigma K) = \mu_B(K)$ für alle σ aus der Bewegungsgruppe, da

$$\text{ja } h_n(\sigma K, K_n^0) = h_n(K, K_n^0).$$

Diese Methode läßt sich nun auf beliebige, lokalkompakte Gruppen übertragen, wo K_n^0 Umgebung des neutralen Elementes der Gruppe sind (Haarsches Maß).

§ 26. Wir fragen nun:

Gibt es Methoden, um jeder Menge einen Inhalt zuzuordnen?

Banachinhalt: Wir betrachten jetzt nur Mengen auf der Geraden und in der Ebene.

Banach (1892-1945) hat in Fund.Math. 4 (1922) folgendes gezeigt: Jeder beschränkten Menge A kann ein Inhalt J_B so zugeordnet werden, so daß gilt

$$1) J_B(A_1 + A_2) = J_B(A_1) + J_B(A_2), \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

2) Wenn A_1 kongruent A_2 , so ist

$$J_B(A_1) = J_B(A_2)$$

$$3) J_B(\text{Einheitsquadrat}) = 1$$

Damit wäre also das Problem gelöst, was den Flächeninhalt anlangt. Es ist aber zu beachten, daß J_B nicht eindeutig bestimmt ist, Weiter ist J_B nicht invariant gegenüber affinen Abbildungen mit Determinante ± 1 . Wie J.von Neumann gezeigt hat, kann es einen solchen Inhalt nicht geben. Wie steht es mit dem Raum? Wenn man nur verlangt, daß der Inhalt gegenüber Translationen invariant ist, nicht aber gegenüber Drehungen, dann gibt es wieder einen Banachinhalt, welcher 1), 2), 3) erfüllt. Es ist aber in 2) kongruent durch "translationsgleich" zu ersetzen.

Anhang zu § 26.

Wir wollen nun einen Einblick in diese Sätze geben. Auf jeder abelschen Gruppe G kann man jeder Menge (welche beschränkt ist) einen Inhalt J_B zuordnen, so daß gilt

$$1) J_B(A_1 + A_2) = J_B(A_1) + J_B(A_2)$$

2) Geht A_1 durch eine Abbildung $g \in G$ aus A_2 hervor, so ist

$$J_B(A_1) = J_B(A_2)$$

$$3) J_B(G) = 1$$

Beweis: Es sei F die Menge aller beschränkten Funktionen f auf G . Wir bilden nun

$$\lambda_N(f, \sigma, \dots, \sigma_N, x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(\sigma_k x)$$

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_N, x \in G)$$

Weiters sei

$$L_N(f, \sigma, \dots, \sigma_N) = \sup_{x \in G} \lambda_N(f, \sigma_1, \dots, \sigma_N, x)$$

$$L(f) = \inf L_N(f, \sigma_1, \dots, \sigma_N) \text{ erstreckt über alle } (N, \sigma_1 \dots \sigma_N)$$

Es gilt $\alpha) L(f+g) \leq L(f) + L(g)$

$$\beta) L(kf) = kL(f) \quad \text{für } \forall k \geq 0$$

Ist $f_0 =$ Einheitsfunktion ($f_0(x) = 1$ für $\forall x \in G$)

so ist $L(f_0) = 1$.

Jetzt wenden wir den Satz von Hahn-Banach an (H. Hahn (1897-1934))

Aus diesem Satz folgt: Es gibt ein Funktional \tilde{L} auf F , so daß

$$\tilde{\alpha}) \tilde{L}(f+g) = \tilde{L}(f) + \tilde{L}(g)$$

$$\tilde{\beta}) \tilde{L}(kf) = k\tilde{L}(f) \quad \forall k \geq 0$$

$$\tilde{\gamma}) \tilde{L}(f) \leq L(f) \quad \forall f \in F$$

$$\tilde{\delta}) \tilde{L}(f_0) = 1.$$

Es sei nun f_σ definiert durch $f_\sigma(x) = f(\sigma x)$

Dann gilt

$$\tilde{L}(f_\sigma) = \tilde{L}(f)$$

und

$$\tilde{\epsilon}) \text{ Wenn } f \geq 0 \rightarrow \tilde{L}(f) \geq 0$$

Es sei nun A eine beliebige Menge auf G . ι_A die Indikatorfunktion von A , also

$$\begin{aligned} \iota_A(x) &= 1, \quad \text{wenn } x \in A \\ &= 0, \quad \text{wenn } x \notin A \end{aligned}$$

Dann definiert man

$$J_B(A) = \tilde{L}_B(\iota_A)$$

Dieses J_B erfüllt alles, was verlangt wurde.

§ 27. Wie steht es im Raum?

Die Sätze von Banach (1892-1945) und Tarski (1901-) in Fund.Math. 6 (244-277), 1924 geben Auskunft.

Def.: Zwei Mengen M, M' heißen endlich zerlegungsgleich oder multikongruent ($M \stackrel{m}{\cong} M'$) (vom Grade s), wenn es zwei Zerlegungen

$$M = A_1 + \dots + A_s$$
$$M' = B_1 + \dots + B_s$$

gibt, so daß

- 1) $A_i \cap A_j = \emptyset$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ für alle Paare (i, j)
mit $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq s, i \neq j$ und
- 2) $A_1 \cong B_1$ kongruent, d.h. A_1 und B_1 gehen durch Bewegung auseinander hervor. Das gleiche gelte für A_2 und B_2 usw.

Es seien $M = P, M' = Q$ Polygone (Polyeder). Dann darf die Multikongruenz nicht mit der Zerlegungsgleichheit der Elementargeometrie verwechselt werden. Bei der Zerlegungsgleichheit kommt es auf die Randpunkte der Teilpolygone (Teilpolyeder) nicht an.

Trotzdem gilt

Satz 1: Zwei Polygone P, Q sind multikongruent genau dann, wenn sie zerlegungsgleich sind, also gleichen Inhalt haben.

Beim Beweis wird die Existenz des Banachmaßes in der Ebene entscheidend benützt.

Satz 2: Zwei Kreise K_1 und K_2 sind multikongruent, wenn sie gleiche Radien haben.

Auch dieser Satz folgt aus der Existenz des Banachmaßes in der Ebene. Daraus folgt nämlich: Sind zwei Mengen multikongruent, so haben sie das gleiche Maß im Banachschen Sinne. Jetzt gleich ein ungelöstes Problem

(Quadratur des Kreises im mengentheoretischen Sinn):

Es sei K ein Kreis vom Radius r , Q ein Quadrat vom Flächeninhalt πr^2 . Ist dann K multikongruent zu Q ,

d.h. gibt es $A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_s$, so daß

$$\begin{aligned}
 K &= A_1 + \dots + A_s & A_j &\approx B_i \\
 Q &= B_1 + \dots + B_s \\
 A_i \cap A_j &= \emptyset, \quad B_i \cap B_j = \emptyset & i &\neq j
 \end{aligned}$$



Jetzt kommt aber der

Satz 3 (Paradoxon von Banach & Tarski)

Es seien M und M' Mengen mit inneren Punkten (und beschränkt) im \mathbb{R}_3 , dann ist stets

$$M \stackrel{m}{\approx} M'$$

d.h. je zwei beliebige beschränkte Mengen M, M' mit inneren Punkten sind stets multikongruent (d.h. endlich zerlegungsgleich), d.h. es gibt ein s und Mengen $A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_s$, so daß

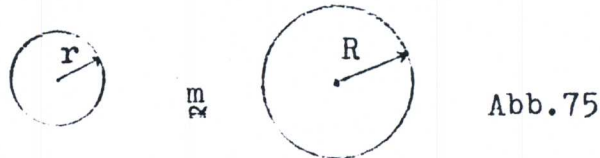
$$\begin{aligned}
 M &= A_1 + \dots + A_s & A_i &\not\cap A_j \\
 M' &= B_1 + \dots + B_s & B_i &\not\cap B_j
 \end{aligned}$$

Es sind z.B. je zwei Polyeder (auch wenn die Volumen verschieden sind) zerlegungsgleich im Sinne von Banach-Tarski.

Weitere Beispiele

M = Kugel von Radius r
 M' = Kugel von Radius R

$$M \stackrel{m}{\approx} M'$$



Eine grobe Abschätzung für den Grad der Multikongruenz (nach Hadwiger): Man kann

$$s \leq 400^2 \left(\frac{R}{r}\right)^{12} \quad (*)$$

nehmen. Es gilt (*) auch für beliebige M und M', wenn

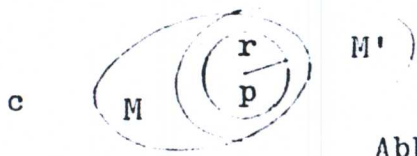


Abb.'76

P innerer Punkt in M wie in M' und

$$K_p(R) \supset M \cup M'$$

$$K_p(r) \subset M \cap M'$$

Nehmen wir $r = 1$, $R = 100$, dann ist

$$s \leq 400^2 10^{24} \leq 4 \cdot 10^{28}$$

Daraus folgt weiter: im \mathbb{R}_3 kann nicht jede Menge M einen Inhalt $J(M)$ besitzen, welcher bewegungsinvariant ist, so daß $J(E) = 1$ ist, wo E der Einheitswürfel ist.

Beweis: Es ist ja nach B-T (Banach-Tarski)

$$E \stackrel{m}{\cong} E' + E''$$

wo $E \cong E'$, $E'' \cong E$, $E' \cap E'' = \emptyset$

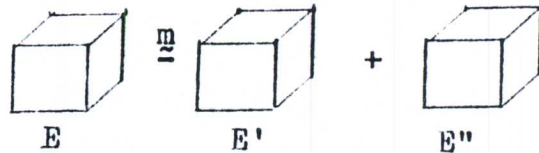


Abb.77

$$J(E) = J(E') + J(E'') = 2J(E), \rightarrow J(E) = 0$$

Der Beweis von Satz 3 stützt sich auf zwei Sätze und zwar auf Satz 4: Es seien 3 Mengen, A, B, C gegeben mit

$$A \subset B \subset C$$

und es sei

$$A \stackrel{m}{\cong} C$$

dann ist

$$\rightarrow B \stackrel{m}{\cong} C \stackrel{m}{\cong} A$$

(Beweismethode wie in dem Satz von Schröder-Bernstein). Der Satz stammt von Banach.

Weiter kommt nun das Paradoxon von Hausdorff (1868-1942) in M.A. 75, 428-33 (1914) ins Spiel. Es sei gleich nach B-T formuliert. Es sei S_2 die Oberfläche der Einheitskugel. Dann kann man S_2 in zwei Teile V_1 und V_2 teilen, so daß

$$S_2 = V_1 + V_2, \quad S_2 \stackrel{m}{\cong} V_1, \quad S_2 \stackrel{m}{\cong} V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

ist, d.h. man kann S_2 und V_1 in Teile teilen, welche durch Bewegung (Drehung) auseinander hervorgehen. Die Anzahl der Teile ist natürlich endlich. Das Gleiche gilt für S_2 und V_2 .

Aus diesem Paradoxon folgern nun B-T: Jede Kugel K ist multi-kongruent zu $K' + K''$, wo $K \stackrel{m}{\cong} K'$ und $K \stackrel{m}{\cong} K''$ ist mit $K' \cap K'' = \emptyset$.



d.h. es gibt Mengen $A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_s$, so daß

$$\begin{aligned} K &= A_1 + \dots + A_s \\ K' + K'' &= B_1 + \dots + B_s \\ A_1 &\cong B_1, \dots, A_s \cong B_s \end{aligned}$$

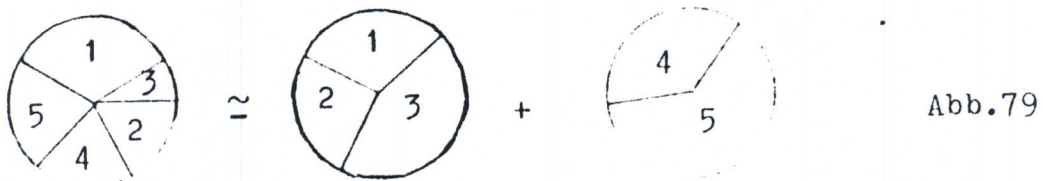
Solche Zerlegungen nennt man paradoxe Zerlegungen.

Nach B-T geht es mit $s = 10$, nach

J.von Neumann $s = 9$, nach

Robinson geht es mit $s = 5$, aber nicht mit $s = 4$,

(Fund.Math. 34 246-60 (1957))



symbolisch

De Groof & Dekker (Fundament. 43) haben gezeigt, daß man die Teile so herausschneiden kann, daß sie zusammenhängend und im kleinen zusammenhängend sind.

J.von Neumann hat gezeigt: Das Paradoxon von Banach und Tarski gilt auch in der Ebene, wenn bei der Multikongruenz

$$A_j \stackrel{m}{\cong} B_j$$

bedeutet, daß A_j und B_j durch eine affine Abbildung mit $\text{Det} \pm 1$ auseinander hervorgehen.

Das Paradoxon hängt also ebenfalls von der zugrundegelegten Gruppe ab.

J.von Neumann (Fund.Math. 13 (1929) 73-116) zeigte weiter: Es sei B die Bewegungsgruppe des \mathbb{R}^n , G Untergruppe von B (oder Obergruppe von B).

Def. $J(.,G)$ ist Inhaltsfunktion auf der Menge $P^*(\mathbb{R}^n)$ aller

beschränkten Mengen im \mathbb{R}^n in bezug auf G , wenn gilt

- 1) $J(A_1 + A_2) = J_B(A_1) + J_B(A_2)$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
- 2) Ist $A_1 \stackrel{G}{\cong} A_2$, d.h. $\exists g \in G$, so daß $A_2 = gA_1$, so sei $J(A_1) = J(A_2)$
- 3) $J(E) = 1$ (E Einheitswürfel).

Wenn $G = B$ so ist J die klassische Inhaltsfunktion.

J.von Neumann zeigt: Ist G abelsch bzw. auflösbar (oder endlich), dann ist jede Menge aus P^* in bezug auf G quadrierbar, d.h. besitzt einen Inhalt.

Beispiel: $n = 1$, $G = B$; $n = 2$, $G = T$ (Gruppe der Translationen).

$B/T \cong O_2$ (Drehgruppe in \mathbb{R}_2), also B auflösbar;

$n > 1$ $G = 1$ (Sätze von Banach)!

$n = 3$ B nicht auflösbar. Es gibt $\sigma, \tau \in B$, so daß $\sigma \perp \tau$ und

$H = \{\sigma^{j_1}, \dots, \tau^{j_2}, \dots\}$ frei ist.

J.von Neumann zeigt: Besitzt G eine solche Untergruppe H , so gibt es stets paradoxe Zerlegungen im \mathbb{R}^n (wie bei $B-T$), also nicht alle Mengen aus P^* sind G -quadrierbar

Beispiel: $n = 2$ G Gruppe der affinen Abb. mit $\text{Det} = +1$

Anhang zu 27. Wir wollen jetzt Satz 4 und Satz 3 beweisen.

1) Satz von Banach

Es sei $A \supset B \supset C$. Dann gilt: ist $A \stackrel{m}{\cong} C \rightarrow B \stackrel{m}{\cong} A \stackrel{m}{\cong} C$.

Beweis: $A = A_1 + \dots + A_s$ $A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$

$C = C_1 + \dots + C_s$ $C_i \cap C_j = \emptyset$

nach Voraussetzungen für ein $s \geq 1$.

Da $C_j \cong A_j \rightarrow \exists \varphi_j : A_j \rightarrow C_j$, so daß $C_j = \varphi_j(A_j)$

Def. $C = \varphi(A)$, wo $\varphi/A_j = \varphi_j$

$\varphi(A) = C \subset B \subset A \rightarrow \varphi(A-B) \subset B$

$\varphi^2(A) \subset \varphi(A) \rightarrow \varphi^2(A-B) \subset B$, allgemein

$\varphi^s(A-B) \subset B$ für $\forall s \geq 1$

Def. $T = \bigcup_{k=0}^{\infty} \varphi^k(A-B)$

$$\varphi(T) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \varphi^{k+1}(A-B) \subset T, \text{ also}$$

$$T = (A-B) \cup \varphi(T) \quad \text{und} \quad \varphi(T) \subset B, \quad \text{da} \quad A-B \cap \varphi(T) = \emptyset$$

Es ist

$$A - ((A-B) \cup \varphi(T)) = B - \varphi(T) = T$$

Es ist

$$A = T \cup (A-T)$$

$$T = A \cap T = (A_1 \cap T) + \dots + (A_s \cap T)$$

$$\varphi(T) = \varphi(A_1 \cap T) + \dots + \varphi(A_s \cap T) = C_1 \cap \varphi(T) + \dots + C_s \cap \varphi(T)$$

Es ist also

$$B = A - T + \varphi(T) \tag{x}$$

$$= A - T + C_1 \cap \varphi(T) + \dots + C_s \cap \varphi(T).$$

Setzen wir $B_k = C_k \cap \varphi(T)$,

so ist $B_k = \varphi_k(A_k \cap T)$, also

$$B_k \approx A_k \cap T.$$

Nun ist $A = A - T + A_1 \cap T + \dots + A_s \cap T$, (xx)

also nach (x) und (xx) $A \overset{m}{\approx} B$

Anzahl der Bestandteile in B und A ist jetzt $s+1$

2) Paradoxon von Hausdorff (1868-1942) 1914

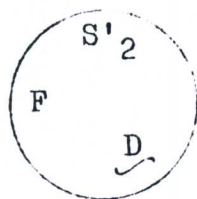


Abb. 80

$$S_2 \overset{m}{\approx} V_1 + V_2, \quad S_2 \overset{m}{\approx} V_1, \quad S_2 \overset{m}{\approx} V_2, \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Beweis nach J. von Neumann (1903-1957) 1929 in Fund. math. 13

Es sei $O_3 =$ Gruppe aller Drehungen in \mathbb{R}^3 . Dann gibt es

σ, τ in O_3 , so daß $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ und aus

$$\sigma^{u_1} \tau^{v_1} \dots \sigma^{u_m} \tau^{v_m} = \epsilon \quad \text{folgt} \quad u_1 = v_1 = \dots = u_m = v_m = 0$$

Beweis:

Bei $\sigma = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ benützt man

$$\sin \varphi = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos \varphi = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad \text{dann ist } X = \sigma^{u_1} \tau^{v_1} \dots \sigma^{u_m} \tau^{v_m} \text{ eine}$$

Matrix, deren Glieder rationale Funktionen in x sind.

Ist x eine transzendente Zahl, so kann X nie die Einheitsmatrix sein.

Def. $H = \{\sigma^{u_1} \tau^{v_1} \dots\} = \{h, \dots\}$. Es sei

$H_g = \{\sigma^g \tau^{v_1} \dots\}$, also $H = \bigcup_g H_g$. Insbesondere ist

$H_0 = \{\tau^{v_1} \dots\}$.

Es ist

$$\sigma^{k-g} H_g = H_k; \forall g \text{ ist } \tau H_g \subset H_0$$

Def. $F \subset S_2$, $F = \{x \in S_2, hx \neq x, h \neq \epsilon\}$

Man kann zeigen: $S_2 - F = D$ ist abzählbar

Nun Klasseneinteilung in F : $x \sim y \leftrightarrow \exists h \in H$ mit $hx = y$

Die Klassen seien K_j . K sei die Menge der Klassen. Es sei nun eine Auswahl von Repräsentanten x_j aus den

Klassen K_j vorgenommen.

$C = (x_j)$ die Menge dieser Repräsentanten

Def. 1) $hC = (hx)$

$$h_1 C \cap h_2 C \neq \emptyset \leftrightarrow h_1 = h_2$$

$$\bigcup_{h \in H} hC = F$$

Def. 2) $\bigcup_{h \in H_g} hC = C_g$

$$C_g \cap C_{g_1} = \emptyset, \text{ wenn } g \neq g_1,$$

$$\bigcup_g C_g = F,$$

$$\sigma^{h-g} C_g = C, \quad \tau C_g \subset C_0$$

Def. 3) $\bigcup_{g \neq 0} C_g = V$

$$\rightarrow F = C_0 + V \quad V \cap C_0 = \emptyset$$

$$\tau V \subset C$$

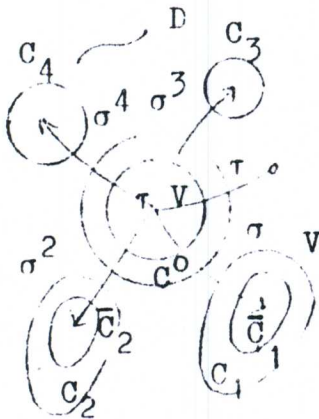


Abb. 81

$$\text{Def. } \bar{C}_1 = \sigma \tau (V)$$

$$\bar{C}_2 = \sigma^2 \tau (V)$$

$$V \xrightarrow{\tau} C_0 \xrightarrow{\sigma} C_1$$

$$F \stackrel{m}{\cong} C_3 + \overline{C_1} = V_1$$

$$V \xrightarrow{\tau} C_0 \xrightarrow{\sigma^2} C_2$$

$$F \stackrel{m}{\cong} C_4 + \overline{C_2} = V'_2$$

$$C_0 \xrightarrow{\sigma^3} C_3, C_0 \xrightarrow{\sigma^4} C_4$$

$$V'_2 \subset F - V_1 \subset F$$

$$F \stackrel{m}{\cong} V'_2 \rightarrow F \stackrel{m}{\cong} V_1 \text{ \& } F \stackrel{m}{\cong} V_2$$

$$F = V_1 + V_2$$

Ergänzung: D abzählbar $\exists \beta \in O_3$ si daß wenn
 $(\beta^k D = D_k), D_k \cap D_l = \emptyset$, wenn $k \neq l$

$$\text{Def. I} = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k, R = S_2 - I$$

$$\beta I = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = I - D, \text{ also } I - D \stackrel{m}{\cong} I$$

$$S_2 - I \stackrel{m}{\cong} S_2 - I \rightarrow S_2 \stackrel{m}{\cong} S_2 - D = \underline{F \stackrel{m}{\cong} V_1 + V_2}$$

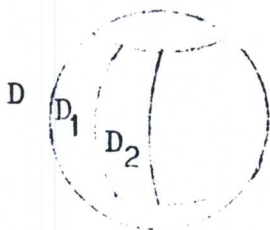


Abb. 82

3) Paradoxon von Banach-Tarski

$K = K(r)$ Kugel mit Radius r , Mittelpunkt O ,
 $rS_2 = S_2$. Nach dem Paradoxon von Hausdorff:

$$\overline{S} = \overline{V_1} + \overline{V_2}, \overline{S_2} \cong \overline{V_1}, \overline{S_2} \cong \overline{V_2}$$

Def. $\overline{K_j}$ = Menge der Radien OP ($p \in \overline{V_j}$) $j = 1, 2$. Dann folgt

$\overline{K_1} \stackrel{m}{\cong} K, \overline{K_2} \stackrel{m}{\cong} K$. Jetzt Translation ausüben auf $\overline{K_1}, \overline{K_2}$, so
 daß sie disjunkt sind. Wir nennen sie K_1, K_2 , also ist

$$\left(\begin{matrix} K \\ 0 \end{matrix} \right) \stackrel{m}{\sim} \left(K_1 \right) + K_2 \quad \text{Abb. 83}$$

$$K \stackrel{m}{\sim} K_1 + K_2, \quad K_1 \stackrel{m}{\sim} K, \quad K_2 \stackrel{m}{\sim} K$$

Verallgemeinerung

$$K \stackrel{m}{\sim} K_1 + \dots + K_n, \quad K_j \stackrel{m}{\sim} K: \quad j=1, \dots, n \quad \text{für } n=3$$

$$K_2 = K_3' + K_4', \quad K = K_1 + \overbrace{K_3' + K_4'}^{K_2}, \quad K_2$$

$$\left(K \right) \stackrel{m}{\sim} \left(K_1 \right) + \left(K_3' \right) + \left(K_4' \right) \quad \text{Abb. 84}$$

Voraussetzung M beschränkt, $M^0 \neq \emptyset \rightarrow \exists K \subset M$

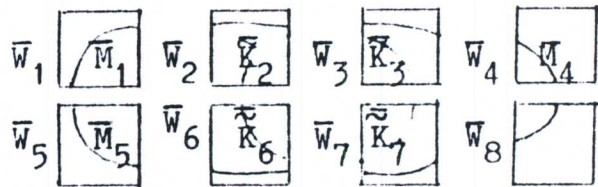
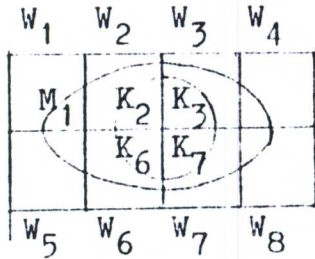


Abb. 85

$\exists W_1, W_2, \dots, W_n \quad W_1 + \dots + W_n \supset M \quad \text{Def. } W_j \cap M = M_j, W_j \cap K = \tilde{K}_j$

Dabei sei der Durchmesser von W_1, W_2, \dots, W_n gleich dem Radius r von K .

Es ist $M_1 + \dots + M_n = M, \quad \tilde{K}_1 + \dots + \tilde{K}_n = K$

Es gibt sicher Translationen, so daß W_j in \overline{W}_j ($j=1, \dots, n$) übergeht, so daß $\overline{K}_j \supset \overline{W}_j$ ($j=1, \dots, n$) gilt, wo \overline{K}_j Kugeln mit Radius r sind und dabei noch disjunkt sind. Die Translationen sind natürlich nicht eindeutig bestimmt. Bei dieser Translation gehen die Mengen M_j in \overline{M}_j , die \tilde{K}_j in \overline{K}_j über. Es ist dann nach dem obigen

$$\overline{K}_j + \dots + \overline{K}_n \stackrel{m}{\sim} K \stackrel{m}{\sim} \tilde{K}_1 + \dots + \tilde{K}_n$$

Wir setzen nun $\bar{M} = \bar{M}_1 + \dots + \bar{M}_n$. Es ist dann $\bar{M} \stackrel{m}{=} M_1 + \dots + M_n = M$.

Es ist nun $\bar{K}_1 + \dots + \bar{K}_r \supset M \supset \bar{K}$. Es ist also nach dem Satz von

Banach $\bar{M} \stackrel{m}{=} \bar{K}$ und daraus folgt $M \stackrel{m}{=} K$. Jetzt kann der Satz von Banach und Tarski leicht bewiesen werden. Es seien M und M' beschränkte Mengen mit inneren Punkten. Dann gibt es sicher eine Kugel K in M und eine Kugel K' in M' mit gleichem Radius. Es ist $M \stackrel{m}{=} K \stackrel{m}{=} K' \stackrel{m}{=} M'$. Es ist also $M \stackrel{m}{=} M'$. Damit ist der Satz bewiesen.

§ 28. Es gibt Analoga zum Satz von Banach-Tarski, welche elementar zu beweisen sind.

Satz von Debrunner. Elemente 24 (19 9)

Def. P, Q Polygone. Wir sagen

$$P \stackrel{h}{\approx} Q$$

Wenn $\exists A_1 \dots A_s, B_1 \dots B_s$, so daß

$$P = A_1 + \dots + A_s$$

$$Q = B_1 + \dots + B_s \quad \text{und}$$

A_i ähnlich zu B_i für alle i

d.h. $\exists \alpha_i, a_i$, so daß jedes $y \in B_i$ die Gestalt hat $y = \alpha_i x + a_i (x \in A_i)$

Debrunner zeigt: Je zwei Polygone sind ähnlich äquivalent, d.h.

$$P \stackrel{h}{\approx} Q.$$

Anschließend Ch. Meier, Elemente 27 (1972) 102-105: Wir nehmen an, es sind P, Q beliebige Mengen mit inneren Punkten, dann \exists Mengen A_1, A_2, B_1, B_2

A_i ähnlich zu $B_i (i=1,2)$ so daß

$$P = A_1 + A_2$$

$$Q = B_1 + B_2$$

§ 29. Der absolute Inhalt von Tarski (1901-) Furd.math.30, 218- 34 (1938).

Es sei A gegeben:

$$\bar{T}(A) = \inf J(W)$$

$$W \supset A \stackrel{m}{=} A$$

(d.h. man betrachte alle Würfel W , welche eine Menge A' enthalten, welche multikongruent zu A sind, d.h. alle Würfel W , in der man A verpacken kann, wenn man A in Teile $A_1 \dots A_s$ zerlegt hat, so daß nach geeigneten Bewegungen A_1 in A_1' , A_2 in A_2' usw. über, so daß $A_1' + \dots + A_s' = A' \subset W$ liegt.

Analog definiert man

$$\underline{T}(A) = \sup_{W \sqsupseteq W' \subset A} J(W)$$

Es gilt (nur für R_1 und R_2)

$$\underline{T}(A) \leq \bar{T}(A)$$

A heißt quadrierbar im Sinne von Tarski, wenn $\underline{T}(A) = \bar{T}(A) = T(A)$. T ist endlich additiv und es gilt stets

$$\underline{T}(A) \leq J_B(A) \leq \bar{T}(A)$$

Es ist A T-quadrierbar, wenn für alle J_B (Banach-Inhalt) $J_B(A)$ den gleichen Wert hat.

Ist A im Tarskischen Sinne quadrierbar, so ist der Inhalt durch die Inhaltsaxiome eindeutig bestimmt (daher absoluter Inhalt).

Es ist also doch ein natürlicher Inhalt.

Es ist $J(\dot{A}) = T(A)$, wenn J Jordaninhalt von A ist.

§ 30. Ausblick.

- 1) Carathéodory (1873-1956) entwickelte eine abstrakte Maßtheorie auf beliebigen Mengen. Man definiert auf $P(X)$ eine Funktion (äußeres Maß) $\bar{\mu}$ so daß, $\bar{\mu}(A) \leq \bar{\mu}(B)$, wenn $A \subset B$, und

$$\bar{\mu} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_i)$$

$\bar{\mu}(A \cup B) = \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B)$, wenn $d(A, B) > 0$, wenn X metrischer Raum.

Def. A meßbar, wenn für $\forall B$, $\bar{\mu}(B) = \bar{\mu}(A \cap B) + \bar{\mu}(B - A)$. Er nimmt später statt $P(X)$ eine Boolesche Algebra.

- 2) Ausgangspunkt: Integral als Funktional $L(f) = \int f$

Daniell (1888-1946) Def.: $\bar{\mu}(A) = \int \iota(A)$

(Später bei Bourbaki) wo ι die Indikationsfunktion von A ist.

Es wird $L(f)$ zunächst für die Klasse I_0 der Treppenfunktionen definiert, dann für alle f , für die $\exists (f_n) \in I_0$ mit $(f_n) \uparrow f$ durch $\lim_{n \rightarrow \infty} L(f_n) = L(f)$.

Die Klasse dieser f sei I_1 . Dann wird für ein beliebiges f $\bar{L}(f) = \inf_{\varphi \geq f, \varphi \in I_1} L(\varphi)$ definiert.

3) Man verzichtet auf die Additivität:

Tornier (1894-) 1941

Gegeben zwei Funktionen f, g mit $f \uparrow, g \uparrow, \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ und $f \leq g$.

Dann wird verlangt $f(J(A)) \leq J(A \cup B) - J(B) \leq g(J(A))$, wenn $A \cap B = \emptyset$

Beispiel: $f(x) = g(x) = x$ für alle x .

Zum Abschluß seien noch zwei Bemerkungen hinzugefügt:

1. Bem.: Prof. Seebach (München bemerkte nach dem Vortrag folgendes: Wenn auch ein Pfiffikus nach Perron in der Ebene nichts erreichen kann (Vgl. S. 13), so kann er dies im Raum nach Banach-Tarski wohl. Allerdings braucht der Pfiffikus das Auswahlaxiom, muß also allmächtig sein.

2. Bem.: Frau Dr. Binder (Wien) hat das Manuskript durchgesehen, Frau Leitner (Klagenfurt) hat den ersten Rohentwurf angefertigt, Frau Hinterhölzl hat das Manuskript in der vorliegenden Fassung verfertigt. Die Zeichnungen stammen von Frau Dr. Binder und von Frau Hinterhölzl.

Mein herzlicher Dank gilt den drei Damen.